ANALISI STOCASTICA — ora 1

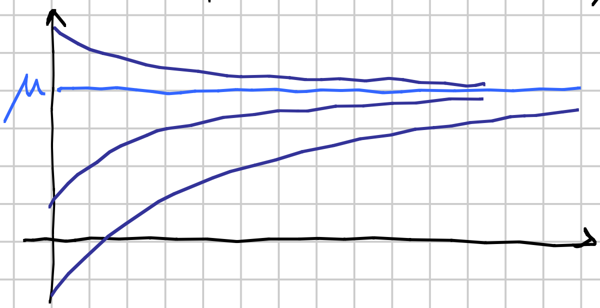
Note Title — 29/02/2016

MOTIVAZIONE

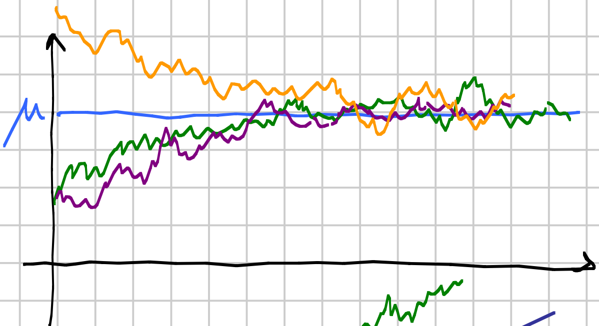
→ equazioni differenziali stocastiche (SDE o SPDE)

$x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$x' = \theta(\mu - x) \qquad \theta > 0 \quad \mu \in \mathbb{R}$



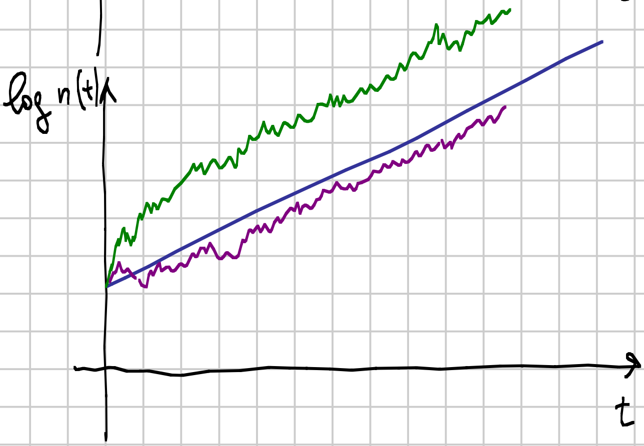
$x' = \theta(\mu - x)$



"vibrazione" casuale

$x' = \theta(\mu - x) + f$

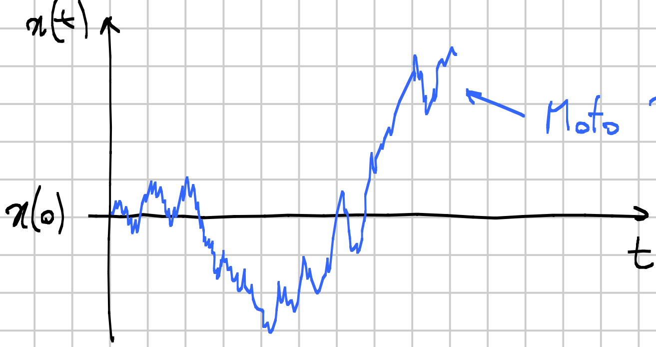
"Ornstein - Uhlenbeck"



dinamica di popolazione

Equazione fondamentale per capire chi è f

$$x'(t) = f(t) \qquad x(t) - x(0) = \int_0^t f(s)\,ds$$



Moto Browniano

Candidato f : derivata del B.M.

1) Problema : definire e costruire BM

2) Problema : BM non è derivabile in nessun punto

↳ definire l'SDE in modo opportuno

3) Problema : serve $\int_0^t g(s)\, dB_s$ va definito e studiato

Questioni pratiche

→ 15 min all'inizio

→ 1 video per ogni ora di lezione

→ elli.dmi (iscriveteri) → Forum news

↳ Forum per domande

↳ Materiale bibliografico

- Materiale : corsi 2012 e 2013 (pdf e video 2013)

codec TSSC

→ libri / dispense

Dispense di F. Caravenna

P. Baldi "SDE e applicazioni"

Revuz-Yor "Continuous Martingales ..." (BIBBIA)

D. Williams "Probability with Martingales"

MODALITÀ D'ESAME :

esercizi dati in anticipo + teoria

oppure : seminario + esercizi

sulle parti saltate, magari durante il periodo di lezione

III SPAZI MISURABILI

$(\Omega, \mathcal{F})$ ← σ-algebra degli eventi

insieme di esiti

$\forall A \in \mathcal{F} \quad A \subseteq \Omega$

$\mathcal{F}$ chiusa per $\cap$ numerabile e complementare

→ σ-algebra generata

$(\Omega, \mathcal{F}) \qquad \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F} \qquad \mathcal{H}$ un insieme di sottoinsiemi di Ω

$\sigma(\mathcal{H})$ σ-alg generata da $\mathcal{H}$

= la minima σ-alg. che contiene $\mathcal{H}$

$$\sigma(\mathcal{H}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{G} \supseteq \mathcal{H} \\ \mathcal{G}\ \sigma\text{-alg}}} \mathcal{G}$$

intersezione è non vuota (c'è $\mathcal{F}$)

inters. qualsiasi di σ-alg è σ-alg (check)

→ $\mathcal{H} = \{A\} \qquad A \in \mathcal{F} \qquad \sigma(\mathcal{H}) = \{A, A^c, \emptyset, \Omega\}$

- π-system: insieme di sottoins. di Ω chiuso per intersez. finite

$$\sigma\text{-alg} \Rightarrow \pi\text{-syst}$$

<u>Thm</u> (Lemma di Dynkin): $(\Omega, \mathcal{F}) \quad \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ un π-system

μ, ν due misure su $\sigma(\mathcal{H})$ t.c. $\mu(\Omega) = \nu(\Omega) < \infty$

Se $\mu = \nu$ su $\mathcal{H}$, allora $\mu = \nu$ su $\sigma(\mathcal{H})$

(dim: Williams A1)

IV VARIABILI ALEATORIE

= funzioni misurabili

$(\Omega, \mathcal{F}) \xrightarrow{X} (S, \mathcal{A}) \qquad X : \Omega \to S$

$\forall A \in \mathcal{A}, \quad X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$

→ X è $\mathcal{G}$-misurabile se $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ σ-alg, $\forall A \in \mathcal{A}$, $X^{-1}(A) \in \mathcal{G}$

→ σ-alg generata da X $\sigma(X)$

= è la più piccola σ-alg che rende misurabile X

$$\sigma(X) = \bigcap_{\substack{\mathcal{G}\ \sigma\text{-alg} \\ X\ \grave{e}\ \mathcal{G}\text{-mis}}} \mathcal{G}$$

Identità vera: $X^{-1}(\mathcal{A}) = \sigma(X)$ (think)

è già una σ-algebra

→ X è $\mathcal{G}$-misurabile $\iff$ $\sigma(X) \subseteq \mathcal{G}$

→ Prop: la misurabilità di una v.a. si può verificare su un insieme di generatori di $\mathcal{A}$

$(\Omega, \mathcal{F})$ $(S, \mathcal{A})$ $X : \Omega \to S$

$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}$ con $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{A}$

$X^{-1}(H) \in \mathcal{F}$ $\forall H \in \mathcal{H}$ allora X è $\mathcal{F}$-misurabile

Dim: $\{A \in \mathcal{A} : X^{-1}(A) \in \mathcal{F}\} =: \mathcal{G}$

$\mathcal{G}$ è σ-alg. (check)

$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{A} = \sigma(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{G}$ □

---

ora 2

▣ PROCESSI STOCASTICI

= famiglie di v.aa. indicizzate

$(\Omega, \mathcal{F})$ $(X_i)_{i \in I}$ v.a. su $(S, \mathcal{A})$

I è un insieme di indici (ad es: $\mathbb{N}$ o $\mathbb{R}_+$)

★ Esempio 1: Processo di Bernoulli (di parametro $p \in (0,1)$)

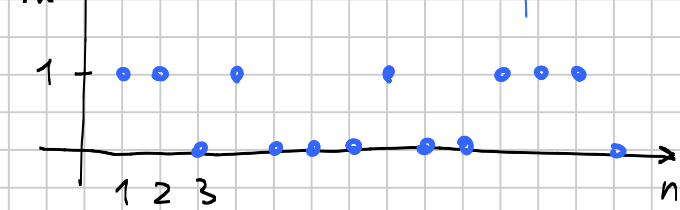
$I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $(S, \mathcal{A}) = (\{0,1\}, \dots)$

$(X_n)_{n\geq 1}$ $\quad X_n$ v.a. Bernoulliana di par p

$$P(X_n = 1) = p$$

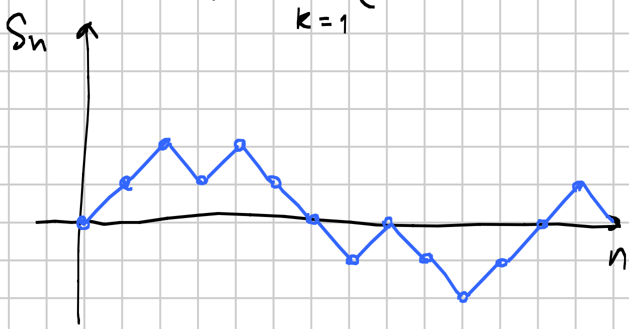
$$P(X_n = 0) = 1-p$$

tutte indipendenti



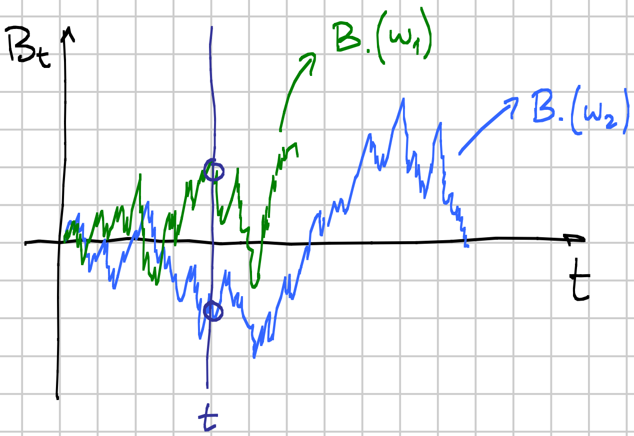
★ Esempio 2 : Passeggiata aleatoria semplice

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} (2X_k - 1) \qquad I = \mathbb{N} \qquad S_0 \equiv 0$$



★ Esempio 3 : Moto Browniano (euristico)

$$I = [0, +\infty) \qquad (B_t)_{t\geq 0}$$



$\omega_1, \omega_2 \in \Omega$

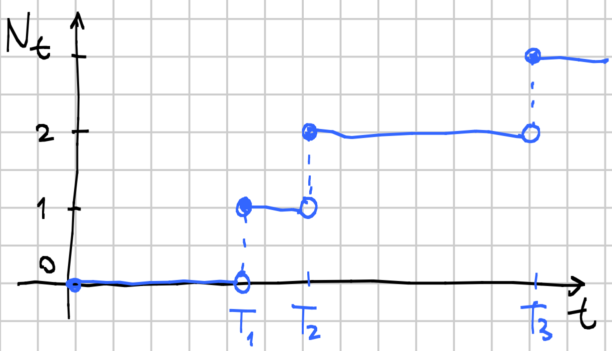
$(B_t)_{t\geq 0}$ $\quad B_t$ v.a. da $(\Omega, \mathcal{F})$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$

$$B_t = B_t(\omega)$$

$\omega \in \Omega$

★ Esempio 4 : Processo di Poisson $\qquad I = [0, +\infty)$

$$(S, \mathcal{S}) = \mathbb{N}$$



$$\left.\begin{array}{l} T_1 \sim expo(\lambda) \qquad \lambda > 0 \\ T_2 - T_1 \sim expo(\lambda) \\ T_{n+1} - T_n \sim expo(\lambda) \end{array}\right\} \text{indipendenti}$$

Sulla misurabilità dei processi stocastici

$(\Omega, \mathcal{F})$ $(S, \mathcal{A})$ $\quad X = (X_i)_{i \in I}$ $\quad X_i : \Omega \to S$ misurabili $\forall i \in I$

il processo

$$X : \Omega \to S^I := \{ \text{funzioni } s : I \to S \}$$

(notazione più flessibile del classico spazio prodotto)

★ Ci sono due nozioni di misurabilità:

→ $\forall i \in I$ X_i sia misurabile

→ X misurabile rispetto alla σ-alg prodotto

↳ in realtà coincidono

$$(S^I, \mathcal{A}^{\otimes I}) =: (\mathcal{X}; \mathcal{G})$$

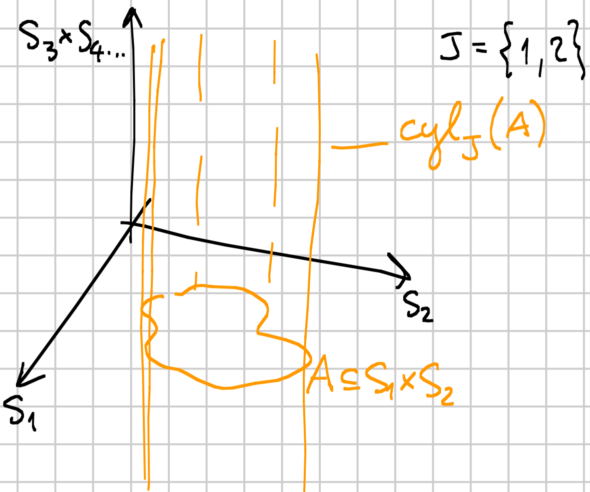
→ $\mathcal{G}$ per def è la più piccola che rende misurabili le proiezioni, ovvero quella generata dagli insiemi cilindrici

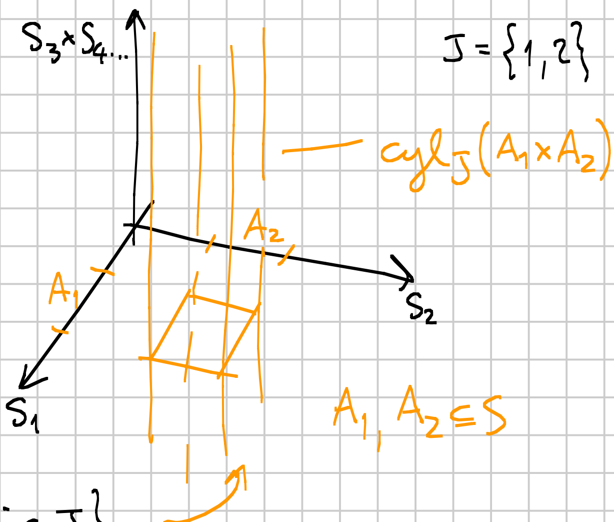
★ Sugli insiemi cilindrici

$\forall J \subseteq I$ $\quad |J| < \infty$ $\quad$ insieme finito di coordinate

$\forall A \subseteq S^J$

$$cyl_J(A) := \{ x \in \mathcal{X} : x|_J \in A \}$$





$$\mathcal{E}_J := \{ cyl_J(\prod_{j \in J} A_j) : A_j \in \mathcal{A} \ \forall j \in J \}$$

$$\mathcal{D}_J := \{ cyl_J(A) : A \in \mathcal{A}^{\otimes J} \}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\overset{\pi\text{-sys}}{\mathcal{C}_J} \arrow[d, "\bigcup_J"'] & \subseteq & \overset{\sigma\text{-alg}}{\mathcal{D}_J} \arrow[d, "\bigcup_J"] & = \sigma(\mathcal{C}_J) \\
\underset{\pi\text{-sys}}{\mathcal{C}} & \subseteq & \underset{\text{alg}}{\mathcal{D}} & \subseteq \mathcal{G} = \sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{D})
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{C} := \bigsqcup_{\substack{J \subseteq I \\ |J| < \infty}} \mathcal{C}_J \qquad \mathcal{D} := \bigsqcup_{\substack{J \subseteq I \\ |J| < \infty}} \mathcal{D}_J$$

★ X_i misurabili $\Rightarrow$ X misurabile

$\forall G \in \mathcal{G} \quad X^{-1}(G) \in \mathcal{F}$ basta però $\forall C \in \mathcal{C} \quad X^{-1}(C) \in \mathcal{F}$

$\forall C \in \mathcal{C} \qquad C = cyl_J\left(\prod_{j \in J} A_j\right)$ per opportuni $J \subseteq I$ $|J| < \infty$, $A_j \in \mathcal{A}$

$$X^{-1}(C) = X^{-1}\left(cyl_J\left(\prod_{j \in J} A_j\right)\right) = \left\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in cyl_J\left(\prod_{j \in J} A_j\right)\right\}$$

$$= \left\{\omega \in \Omega : X(\omega)\big|_J \in \prod_j A_j\right\} = \left\{\omega \in \Omega : X_j(\omega) \in A_j \ \forall j \in J\right\}$$

$$= \bigcap_{j \in J} \underbrace{X_j^{-1}(A_j)}_{\in \mathcal{F}} \quad \in \mathcal{F}$$

★ X misurabile $\Rightarrow$ X_i misurabili

(verifica facile)

ANALISI STOCASTICA ora 3

Note Title 07/03/2016

PROCESSI STOCASTICI

$(\Omega, \mathcal{F}) \xrightarrow{X_i} (S, \mathcal{A})$ $\quad X = (X_i)_{i \in I}$ $\quad I$ insieme infinito

$(\Omega, \mathcal{F}) \xrightarrow{X} (\mathbb{X}, \mathcal{G})$

- X_i sono misurabili $\Leftrightarrow$ X è misurabile

Dim (di nuovo, questa volta $\mathcal{G}$ è la minima σ-alg. che rende misurabili le proiezioni)

$\pi_i : \mathbb{X} \to S$ proiezioni $\quad i \in I$

$$X_i = \pi_i \circ X$$

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "X_i"'] & \mathbb{X} \arrow[r, "\pi_i"] & S \end{tikzcd}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Facile (HW: scrivere)

$\boxed{\Rightarrow}$ $\forall A \in \mathcal{A}$ $\quad \mathcal{F} \ni X_i^{-1}(A) = X^{-1}(\underbrace{\pi_i^{-1}(A)}_{=G})$

ipotesi

$$X^{-1}(G) \in \mathcal{F} \quad \forall G \in \{\pi_i^{-1}(A) : i \in I, A \in \mathcal{A}\} =: \mathcal{H}$$

$$\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{H}) \quad \text{per definizione}$$

$\to$ verificato su un insieme di generatori - finito

PROBABILITÀ E LEGGI

$(\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F}, P)$

$P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$

- $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$
- $P(\Omega) = 1$
- σ-additiva $\quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ $\quad A_i$ a due a due disg.

→ Notazione $\quad P(X \in B) \overset{\text{Not}}{=} P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = P(X^{-1}(B))$

$$P(X \le 2, Y \ge 3) \overset{\text{Not}}{=} P(\{X \le 2\} \cap \{Y \ge 3\})$$

◉ LEGGE DI UNA VARIABILE ALEATORIA

$$(\Omega, \mathcal{F}) \xrightarrow{X} (S, \mathcal{A})$$
$$(\Omega, \mathcal{F}, P) \xrightarrow{X} (S, \mathcal{A}, \mathcal{L}_X)$$

→ misura immagine o "push forward" di P

$\mathcal{L}_X$ misura di probabilità su $(S, \mathcal{A})$

$\forall A \in \mathcal{A} \quad \boxed{\mathcal{L}_X(A) := P(X \in A)}$

NB Siccome X è misurabile, è una definizione ben posta (think)

→ Esempio 0 : X v.a. costante $X = x$ q.c. $\quad x \in \mathbb{R}$

a.s. quasi certamente

$$\mathcal{L}_X = \delta_x$$

→ Esempio 1 : $H \in \mathcal{F} \quad X = \mathbb{1}_H$ funzione indicatrice

$$\mathcal{L}_X = (1-p)\delta_0 + p\,\delta_1 \quad \text{dove} \quad p := P(H)$$

Def : una v.a. che assume solo i valori 0 e 1 si dice di Bernoulli

→ Esempio 2 : $\mathcal{N}(0,1)$

Def : una v.a. X si dice normale standard se la sua legge è:

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \boxed{\mathcal{L}_X(B) = \int_B \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}}_{\text{densità rispetto alla misura di Lebesgue}} dx}$$

→ Esempio 3: X v.a. su $\mathbb{R}^d$

$\mu \in \mathbb{R}^d$ $\quad Q \in M_d$ simmetrica e definita positiva (stretta)

<u>Def</u>: una v.a. X su $\mathbb{R}^d$ si dice normale multivariata di media μ e matrice di covarianza Q se la sua legge è:

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \qquad \mathcal{L}_X(B) = \int_B (2\pi)^{-\frac{d}{2}} (\det Q)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T Q^{-1}(x-\mu)\right\} dx$$

<u>Def (vera)</u>: una v.a. X su $\mathbb{R}^d$ si dice normale multivariata se $\forall v \in \mathbb{R}^d$ la v.a. $v \cdot X$ ha legge normale

→ Esempio 4: Sia X processo di Bernoulli di parametro $p \in [0,1]$

$\mathcal{L}_X = ?$

$X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{G})$

$\mathcal{X} = \{0,1\}^{\mathbb{N}_+} \qquad \mathcal{G} = \sigma(\mathcal{C}) \qquad \forall G \in \mathcal{G} \quad \mathcal{L}_X(G) = ?$

★ Problema: non c'è una misura di riferimento ovvia come nei casi precedenti → definisco $\mathcal{L}_X$ su dei generatori

$$\emptyset \neq C \in \mathcal{C} \qquad C = cyl_J\Big(\prod_{j \in J}\{v_j\}\Big) = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathcal{X} : x_j = v_j \ \forall j \in J\}$$

per J e v_j opportuni

$$\mathcal{L}_X(C) = P(X \in C) = P(X_j = v_j \ \forall j \in J) = P\Big(\bigcap_{j \in J}\{X_j = v_j\}\Big)$$

$$= \prod_{j \in J} P(X_j = v_j) = \prod_{j \in J} p^{v_j}(1-p)^{1-v_j} = p^k (1-p)^{n-k}$$

dove $\quad n = |J| \qquad k = \sum_{j \in J} v_j$

indici fissati

di indici con $X_j = 1$

- Sulle leggi dei processi stocastici

$(\Omega, \mathcal{F}, P) \xrightarrow{X} (\mathcal{H}, \mathcal{G})$ $\qquad X = (X_i)_{i \in I}$ $\qquad X_i$ a valori in $(S, \mathcal{A})$

$(\Omega, \mathcal{F}, P) \xrightarrow{X_i} (S, \mathcal{A}, \mathcal{L}_i)$

$\mathcal{L}_i$: legge di X_i $\leftarrow$ al variare di i sono le leggi marginali di X

$J \subseteq I \quad |J| < \infty$

$X_J = (X_j)_{j \in J} \qquad (\Omega, \mathcal{F}, P) \xrightarrow{X_J} (S^J, \mathcal{A}^{\otimes J}, \mathcal{L}_J)$

$\mathcal{L}_J$: legge di X_J $\leftarrow$ al variare di J sono le leggi finito-dimensionali di X

HW: Costruire un semplice processo stocastico con le stesse leggi marginali del processo di Bernoulli di parametro p e leggi finito-dimensionali diverse

↳ Non basta conoscere le marginali

- Proposizione: X, Y due processi stocastici a valori in $(\mathcal{H}, \mathcal{G})$

$\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_Y$ sse coincidono le leggi finito-dimensionali

HW: Dim!

(Stessa idea esempio 4 + ora 4 del 2013)

- Processi indistinguibili, modificazioni e versioni

Def X e Y su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a valori in $(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ sono indistinguibili se con probabilità 1, $\forall i \in I$, $X_i = Y_i$

ovvero $\exists H \in \mathcal{F}$ $P(H) = 1$: $\forall \omega \in H$ $\forall i \in I$ $X_i(\omega) = Y_i(\omega)$

Def X e Y su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a valori in $(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ sono modificazioni se $\forall i \in I$, $P(X_i = Y_i) = 1$

ovvero $\forall i \in I \quad \exists H_i \in \mathcal{F} : \forall \omega \in H_i \quad X_i(\omega) = Y_i(\omega)$

<u>Def</u> X su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e Y su $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ a valori in $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ sono versioni se $\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_Y$

☆ Se I è numerabile modificazioni = indistinguibili:

$$H := \bigcap_{i \in I} H_i \in \mathcal{F}$$

$$P(H) = P\Big(\big(\bigcup_{i \in I} H_i^c\big)^c\Big) = 1 - P\Big(\bigcup_{i \in I} H_i^c\Big) \geq 1 - \sum_{i \in I} P(H_i^c) = 1$$

☆ modificazioni $\Rightarrow$ versioni

$\forall J \subseteq I \quad |J| < \infty \quad \forall G \in \mathcal{D}_J \qquad G = cyl_J(H) \quad H \in \mathcal{A}^{\otimes J}$

$$\mathcal{L}_X(G) = P(X \in G) = P(X_J \in H) = P(X_J \in H, X_J = Y_J)$$

$$= P(Y_J \in H, X_J = Y_J) = P(Y_J \in H) = \mathcal{L}_Y(G)$$

evento q.c.

le leggi finito-dimensionali coincidono $\Rightarrow \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_Y$

☆ versioni definite sullo stesso spazio sono modificazioni? No

HW: trovare controesempio

☆ $\mathcal{G} = \mathcal{A}^{\otimes I}$ nel caso dei processi stocastici a tempi continui $I = \mathbb{R}_+$

$\mathcal{G} = \mathcal{B}^{\otimes \mathbb{R}_+}$

$\mathcal{G}$ contiene solo gli eventi descrivibili con un insieme finito o numerabile di indici $\to$ la legge di X "vede" solo questo tipo di eventi

Informazioni come la continuità delle traiettorie non possono essere contenute nella legge del processo e vanno chieste a parte

☆ Se X e Y processi (con $I = \mathbb{R}_+$ o $I = \mathbb{R}$) a valori in uno spazio metrico sono modificazioni e hanno traiettorie continue a destra (o a sinistra) allora sono indistinguibili

HW: pensare a Dim!

▣ INDIPENDENZA

Sapevate $A, B \in \mathcal{F}$ sono indip. se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Def una famiglia $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ di σ-alg si dice indipendente se $\forall J \subseteq I$, $|J| < \infty$ $\forall E_j \in \mathcal{F}_j$ $j \in J$

$$P\left(\bigcap_{j \in J} E_j\right) = \prod_{j \in J} P(E_j)$$

Def una famiglia $(E_i)_{i \in I}$ di eventi si dice indip. se lo sono le σ-alg generate $\sigma(E_i) = \{\emptyset, E_i, E_i^c, \Omega\}$

Def una famiglia $(X_i)_{i \in I}$ di v.a. si dice indip se lo sono le σ-alg generate

↳ Operativamente $\forall J \subseteq I$ $|J| < \infty$ $\forall (A_j)_j$ $A_j \in \mathcal{A}$

$$P\left(\bigcap_{j \in J} \{X_j \in A_j\}\right) = \prod_{j \in J} P(X_j \in A_j)$$

▣ MOTO BROWNIANO

$(B_t)_{t \geq 0}$ a valori in $\mathbb{R}$ si dice BM se

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ B_0 = 0 \\ 2)\ (B_{t_{n+1}} - B_{t_n})_{n<m} \text{ indipendenti} \\ 3)\ B_{t_{n+1}} - B_{t_n} \sim \mathcal{N}(0, t_{n+1} - t_n) \end{array}\right\} \text{legge di } B$$

dove $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$

4) $B.$ ha traiettorie continue ← in più

☒ Moto Browniano (aka processo di Wiener)

$(B_t)_{t\geq 0}$ a valori in $\mathbb{R}$ si dice BM se

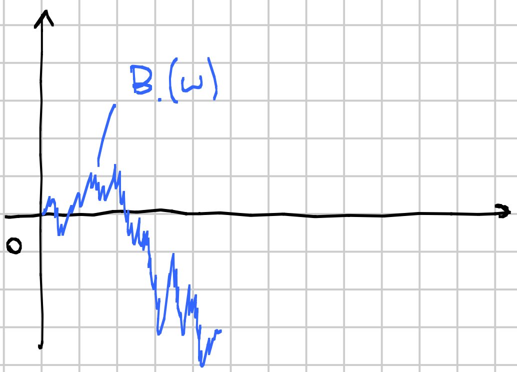
1) $B_0 = 0$
2) $(B_{t_{n+1}} - B_{t_n})_{n<m}$ indipendenti
3) $B_{t_{n+1}} - B_{t_n} \sim \mathcal{N}(0, t_{n+1} - t_n)$

} legge di B

dove $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m$

4) $B_\cdot$ ha traiettorie continue ← in più

$\forall \omega \in \Omega \quad B_\cdot(\omega) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ è continua



☒ Esistenza Moto Browniano

I. Thm di estensione di Kolmogorov
↳ $\exists$ un processo con la legge specificata da 1), 2), 3)

II. Thm di regolarità di Kolmogorov
↳ continuità su un insieme denso e numerabile di tempi

III. Esistenza di una modificazione con traiettorie continue

THM. DI ESTENSIONE

(S, d) spazio metrico $\mathcal{A} = \mathcal{B}(S)$

I insieme di indici qualsiasi

Date delle leggi finito-dimensionali regolari e compatibili

$\forall J \subseteq I \quad |J| < \infty$ è data $\mathcal{L}^J : \mathcal{A}^{\otimes J} \to \mathbb{R}$ misura di prob.

$\to$ regolare : $\forall J \subseteq I$ finito, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall B \in \mathcal{A}^{\otimes J}$

$\exists K \in \mathcal{A}^{\otimes J}$ K compatto t.c.

$K \subseteq B$, $\mathcal{L}^J(K) \geq \mathcal{L}^J(B) - \varepsilon$

$\to$ compatibili : $\forall J_1, J_2 \subseteq I$ finiti $\forall B_1 \in \mathcal{A}^{\otimes J_1}$, $B_2 \in \mathcal{A}^{\otimes J_2}$

t.c. $\quad cyl_{J_1}(B_1) = cyl_{J_2}(B_2)$ si ha che

$\mathcal{L}^{J_1}(B_1) = \mathcal{L}^{J_2}(B_2)$

↳ Esempio $0 < t_1 < t_2 < t_3$

$$\left.\begin{aligned} B_{t_2} - B_{t_1} &\sim \mathcal{N}(0, t_2 - t_1) \\ B_{t_3} - B_{t_2} &\sim \mathcal{N}(0, t_3 - t_2) \end{aligned}\right\} \text{indipendenti}$$

$$B_{t_3} - B_{t_1} = (B_{t_3} - B_{t_2}) + (B_{t_2} - B_{t_1}) \sim \mathcal{N}(0, t_3 - t_1)$$

$\mathcal{L}^{(t_1, t_2, t_3)}$ e $\mathcal{L}^{(t_1, t_3)}$ sono compatibili

HW: chi sono qui B_1 e B_2 ?

$J_1 = \{t_1, t_2, t_3\} \qquad J_2 = \{t_1, t_3\}$

Tesi : $\exists!$ $\mathcal{L}$ misura di prob su $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ che estende tutti $\tilde{\mathcal{L}}^J$

$\tilde{\mathcal{L}}^J : \mathcal{G} \supseteq \mathcal{D} \to \mathbb{R} \qquad \mathcal{L}^J : \mathcal{A}^{\otimes J} \to \mathbb{R}$

$\tilde{\mathcal{L}}^J(cyl_J(A)) = \mathcal{L}^J(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}^{\otimes J}$

$\mathcal{X} = S^I \quad \mathcal{G} = \mathcal{A}^{\otimes I}$

$$\mathcal{D} := \{ cyl_J(A) \;:\; J \subseteq I \text{ finito e } A \in \mathcal{A}^{\otimes J} \}$$ algebra

Definisco $\mathcal{L}$ su $\mathcal{D}$

$$\mathcal{L}(cyl_J(A)) := \mathcal{L}^J(A)$$

☆ Buona definizione perché $\mathcal{L}^J$ sono compatibili

se $\exists\, C \in \mathcal{D}$: $C = cyl_{J_1}(A_1) = cyl_{J_2}(A_2)$ per J_1, J_2, A_1, A_2 opportuni

$$\tilde{\mathcal{L}}^{J_1}(cyl_{J_1}(A_1)) := \mathcal{L}^{J_1}(A_1) = \mathcal{L}^{J_2}(A_2) =: \tilde{\mathcal{L}}^{J_2}(cyl_{J_2}(A_2))$$

☆ Unicità di $\mathcal{L}$ automatica, $\mathcal{D}$ è un'algebra

☆ Come si fa ad estendere $\mathcal{L}$ def su un'algebra $\mathcal{D}$ a $\sigma(\mathcal{D})$?

→ Carathéodory

1) $\mathcal{L}(\emptyset) = 0$ check!
2) $\mathcal{L}(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{D}$ check!
3) $A, B \in \mathcal{D} \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathcal{L}(A \cup B) = \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B)$ (check!)
4) $\mathcal{L}$ è continua in 0 : $(A_n)_{n\geq 1}$ $A_n \in \mathcal{D}$ $A_n \searrow \emptyset$

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots \qquad \bigcap_{n\geq 1} A_n = \emptyset$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(A_n) \underset{\text{claim}}{=} 0 = \mathcal{L}\Big(\bigcap_{n\geq 1} A_n\Big)$$

Dim della continuità in zero

$$A_n \searrow \emptyset \qquad A_n \in \mathcal{D} \qquad A_n = cyl_{J_n}(B_n)$$

W.L.O.G. $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots \subseteq J_n \subseteq \dots$ (basta aggiungere le componenti)

- Caso 1 : B_n compatti $\Rightarrow$ (claim) $\bigcap_{n=1}^{N} A_n = \emptyset$ per qualche N

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{finito}$$

claim : RPA $\forall\, n \geq 1$ $\quad x^{(n)} \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$ $\qquad x^{(n)} \in \mathbb{X}$

per $k = 1, 2, \dots$ considero J_k

$$x^{(n)}\Big|_{J_k} =: y^{(n,k)} \in S^{J_k}$$

$k = 1, 2, \dots, n$ $\qquad x^{(n)} \in A_k = cyl_{J_k}(B_k) = \{ z \in \mathbb{X} : z|_{J_k} \in B_k \}$

$$\Rightarrow y^{(n,k)} \in B_k \qquad 1 \leq k \leq n$$

fissato k, mando $n \to \infty$ $\quad y^{(n,k)} \in B_k$ def$\underline{\text{ente}}$ in n

siccome B_k è compatto, per ogni successione di punti definitivamente al suo interno posso prendere una sottosucc. convergente

con un procedimento diagonale esiste $x \in \bigcap_{n \geq 1} A_n$

$k = 1 \qquad n_i^{(1)} \quad i = 1, 2, \dots \qquad y^{(n_i^{(1)}, 1)} \to y^{(1)}$

$k \to k+1 \qquad n_i^{(k+1)} \quad i = 1, 2, \dots \qquad$ sottosucc. di $n_i^{(k)} \qquad y^{(n_i^{(k)}, k)} \to y^{(k)}$

$$\tilde{n}_i := n_k^{(k)} \qquad y^{(\tilde{n}_i, k)} \xrightarrow[i\to\infty]{} y^{(k)} \quad \forall k$$

$$y^{(k)} \in B_k \subseteq S^{J_k}$$

$$j \in J_k \subseteq J_{k+1}, \quad y_j^{(k+1)} = \lim_{i\to\infty} y_j^{(\tilde{n}_i, k+1)} = \lim_{i\to\infty} x_j^{(\tilde{n}_i)} = \lim_{i\to\infty} y_j^{(\tilde{n}_i, k)} = y_j^{(k)}$$

definisco $x \in \mathbb{X}$ così : $\quad x_j := \begin{cases} y_j^{(k)} & J_k \ni j \\ 0 & j \notin \bigcup_{k \geq 1} J_k \end{cases}$

$\forall k \geq 1 \quad x\big|_{J_k} = y^{(k)} \in B_k \iff x \in A_k \quad$ ASSURDO.

- Caso 2: B_n qualsiasi

$\forall n \geq 1 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_n \subseteq B_n$ compatto :

$$\mathcal{L}(A_n) = \mathcal{L}(cyl_{J_n}(B_n)) := \mathcal{L}^{J_n}(B_n) \leq \mathcal{L}^{J_n}(K_n) + \varepsilon = \mathcal{L}(cyl_{J_n}(K_n)) + \varepsilon$$

$cyl_{J_n}(K_n) \subseteq A_n \searrow 0$ quindi per lo step 1 $\mathcal{L}(cyl_{J_n}(K_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\limsup_n \mathcal{L}(A_n) \leq \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \square$$

Applicazione del thm di estensione alla def di BM

a) Regolarità : viene dalla regolarità della misura di Lebesgue + il fatto che la densità è limitata

b) Compatibilità : si verifica (tipo $\boxed{\text{esempio}}$ sopra) ma lo faremo più avanti più in generale

Tesi: $\exists! \mathcal{L}$ su $(\mathbb{X}, \mathcal{G})$ che estende le finito-dim.
costruisco il processo canonico :

$(\Omega, \mathcal{F}, P) \qquad \mathcal{B} = (B_t)_{t\geq 0}$ che soddisfa 1) – 3) della def

$(\mathbb{X}, \mathcal{G}, \mathcal{L}) \qquad B_t := \pi_t$ proiezione canonica $(\mathbb{X} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+})$

Con $\mathcal{L}$ scelgo $x \in \mathbb{X} \quad x \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} \quad x = (x_t)_{t\geq 0}$

$$B_t(x) := \pi_t(x) := x_t$$

$$P((B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}) \in H) = \mathcal{L}(\{x \in \mathbb{X} : (B_{t_i}(x))_{i=1,\dots,n} \in H\})$$

$$= \mathcal{L}(\{x \in \mathbb{X} : (x_{t_i})_i \in H\}) = \mathcal{L}(\{x \in \mathbb{X} : x|_J \in H\}) = \mathcal{L}(cyl_J(H))$$

$J = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$

☆ Q : quanto vale $P(\underbrace{\{x \in \mathbb{X} : B_\cdot(x) \text{ è una funzione continua}\}}_{\text{non sta in } \mathcal{G}})$?

THM DI REGOLARITÀ

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ $\quad X_t$ a valori in $\mathbb{R}$

hp: $\exists\, a > 0,\ b > 1,\ c > 0 : \ \forall s,t \in [0,1]$ si ha:

$$E\left(|X_t - X_s|^a \right) \leq c\, |t-s|^b$$

ts: per q.o. $\omega \in \Omega$ $\ X_\cdot(\omega)$ è α-Hölderiana sui diadici

$\bigcup_{n \geq 1} \mathbb{Z}\, 2^{-n}$ per ogni $\quad \alpha < \dfrac{b-1}{a}$

THM DI REGOLARITÀ

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ $\quad X_t$ a valori in $\mathbb{R}$

hp: $\exists\, a > 0,\ b > 1,\ c > 0$: $\forall s,t \in [0,1]$ si ha:

$$E\left(|X_t - X_s|^a\right) \leq c\,|t-s|^b$$

ts: per q.o. $\omega \in \Omega$ $\ X_\cdot(\omega)$ è α-Hölderiana sui diadici

$$\bigcup_{n \geq 1} \mathbb{Z}\, 2^{-n} \quad \text{per ogni} \quad \alpha < \frac{b-1}{a}$$

★ Per passare da condizioni sulla speranza a stime di probabilità si usa la disuguaglianza di Markov:

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad X$ v.a. $\quad X \geq 0$ q.c. $\quad X \in L^1(\Omega)$

$$P(X > t) \leq \frac{1}{t} E(X) \qquad \forall t > 0 \qquad \text{(Markov)}$$

↳ Y v.a. qualsiasi $\quad |Y|^a \geq 0 \quad P(|Y|^a > t) \leq \frac{1}{t} E(|Y|^a)$

↳ Y v.a. qualsiasi $\quad P(Y > t) = P(e^{\lambda Y} > e^{\lambda t}) \leq e^{-\lambda t} E(e^{\lambda Y})$

in genere c'è un intorno di $\lambda = 0$ per cui $E(e^{\lambda Y}) < \infty$

(si usa a volte nei principi di grandi deviazioni)

★ Per passare da stime di probabilità ad affermazioni con probabilità 1 si usa spesso il I lemma di Borel-Cantelli

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad (A_n)_{n \geq 1}$ $\quad A_n \in \mathcal{F}\ \forall n$

$$\sum_{n \geq 1} P(A_n) < \infty \quad \Longrightarrow \quad P\left(\limsup_{n \geq 1} A_n\right) = 0$$

$$\limsup_{n \geq 1} A_n = \bigcap_{n \geq 1} \underbrace{\bigcup_{k \geq n} A_k}_{\text{almeno uno si verifica}} = \text{si verificano una quantità } \infty \text{ degli } A_n$$

Dim (thm di regolarità)

$n \geq 0 \qquad D_n := 2^{-n}\mathbb{Z} \cap [0,1] \qquad D_0 = \{0,1\},\ D_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \dots$

$D := \bigcup_{n \geq 0} D_n$ diadici di $[0,1]$

$\Delta_n = \{ (p,q) : p,q \in D_n,\ |p-q| = 2^{-n} \}$ coppie di diadici consecutivi

$$E(|X_t - X_s|^a) \leq c|t-s|^b \qquad \forall s,t \in [0,1]$$

$$P(|X_p - X_q| > \delta) = P(|X_p - X_q|^a > \delta^a) \leq \delta^{-a} E(|X_p - X_q|^a) \leq \delta^{-a} c |p-q|^b$$
$$= c\,\delta^{-a} 2^{-nb} \qquad (p,q) \in \Delta_n$$

n fissato

$P(|X_p - X_q| > \delta$ per qualche $(p,q) \in \Delta_n)$

$$= P\Big(\bigcup_{(p,q)\in\Delta_n} \{|X_p - X_q| > \delta\}\Big) \leq \sum_{(p,q)\in\Delta_n} P(|X_p - X_q| > \delta)$$

$$\leq \#\Delta_n \cdot c \cdot \delta^{-a} \cdot 2^{-nb} = 2c\delta^{-a} 2^{-n(b-1)}$$

α - Hölderiano? $\quad |X_p - X_q| \leq C|p-q|^\alpha \qquad$ fisso $\alpha > 0$

$\delta := |p-q|^\alpha = 2^{-\alpha n}$

$$P(\underbrace{|X_p - X_q| > |p-q|^\alpha \text{ per qualche } (p,q) \in \Delta_n}_{=: H_{n,\alpha}}) \leq 2c\, 2^{-(b-1-\alpha a)n}$$

$\forall \alpha < \frac{b-1}{a}$ l'esponente è negativo quindi $\sum_{n\geq 0} P(H_{n,\alpha}) < \infty$

Applico B-C 1 Con prob. $= 1$ solo un numero finito di quegli eventi si verifica.

$$n_0(\omega) := 1 + \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{\bigcup_{k\geq n} H_{k,\alpha}}(\omega) \qquad P\Big(\bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n} H_{k,\alpha}\Big) \overset{BC1}{=} 0$$

$$n_0(\omega) = \infty \iff \omega \in \bigcap_n \bigcup_k H_{k,\alpha} \qquad n_0 < \infty \text{ q.c.}$$

Per come ho definito n_0 $\quad \omega \notin \bigcup_{k \geq n_0} H_{k,\alpha}$ e quindi:

→ per q.o. $\omega \in \Omega$ $\quad \exists n_0 = n_0(\omega) : \forall n \geq n_0, \forall (p,q) \in \Delta_n$ si ha

$$|X_p(\omega) - X_q(\omega)| \leq |p-q|^\alpha$$

Allora $\exists C = C(\omega) : \forall n \geq 0, \forall (p,q) \in \Delta_n$ si ha

$$|X_p(\omega) - X_q(\omega)| \leq C(\omega)\, |p-q|^\alpha \quad \text{q.c.}$$

Manca solo di generalizzare da $(p,q) \in \bigcup_{n \geq 0} \Delta_n$ a $p,q \in D$

$\boxed{\text{ora 8}}$

→ I diadici D sono i punti con una scrittura binaria finita

$x < y \in D \qquad x = 0,c_1c_2c_3\ldots c_m \qquad y = 0,d_1d_2\ldots d_n$

$$x = \sum_{i=1}^{m} c_i 2^{-i} \qquad y = \sum_{j=1}^{n} d_j 2^{-j}$$

Sia $k : c_i = d_i \ \forall i = 1,2,\ldots,k$ $\qquad$ (eventualmente $k=0$)

$$w = 0,c_1c_2\ldots c_k 1 \in D_{k+1}$$

$$w = \sum_{i=1}^{k} c_i 2^{-i} + 2^{-(k+1)} = \sum_{i=1}^{k+1} d_i 2^{-i}$$

se $w = y$ $\quad |X_w - X_y| = 0 = |w-y|^\alpha$,

suppongo wlog $w < y$

$$y - w = \sum_{i=1}^{n} d_i 2^{-i} - \sum_{i=1}^{k+1} d_i 2^{-i} = \sum_{k+2}^{n} d_i 2^{-i}$$

sia $h = \min\{i \geq k+2 : d_i = 1\}$

$$= \sum_{i=h}^{n} d_i 2^{-i} \geq 2^{-h}$$

$$X_y - X_w = \sum_{\ell=k+1}^{n-1} \left(X_{y_{\ell+1}} - X_{y_\ell} \right)$$

$$y_\ell := \sum_{j=1}^{\ell} d_j 2^{-j} \qquad y_n = y \quad y_{k+1} = w$$

$$y_{\ell+1} - y_\ell = d_{\ell+1} 2^{-\ell+1} = 0 \quad \ell = k+1, k+2, \dots, h-2$$

$$= \sum_{\ell=h-1}^{n-1} |X_{y_{\ell+1}} - X_{y_\ell}| \leq C(\omega) \sum_{\ell=h-1}^{n-1} |y_{\ell+1} - y_\ell|^\alpha \leq C(\omega) \sum_{\ell=h-1}^{\infty} 2^{-\alpha(\ell+1)}$$

consecutivi in $\Delta_{\ell+1}$ oppure uguali

$$\leq C(\omega) C_1(\alpha) 2^{-\alpha h}$$

$$\leq C(\omega) C_1(\alpha) (y-w)^\alpha$$

Analogamente $|X_x(\omega) - X_w(\omega)| \leq \dots$

e quindi $\quad |X_x(\omega) - X_y(\omega)| \leq C(\omega) C_2(\alpha) |y-x|^\alpha$

$\forall \alpha < \frac{b-1}{a} \quad$ q.o. $\omega \in \Omega \quad \exists\, C(\omega) < \infty : \forall s,t \in D$

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq C(\omega) C^1(\alpha) |t-s|^\alpha$$

Facendo l'intersezione al variare di $\alpha \in \mathbb{Q}$ $\alpha < \frac{b-1}{a}$ posso scambiare:

q.o. $\omega \in \Omega$ $\forall \alpha < \frac{b-1}{a}$ $X(\omega)$ è α-Hölderiana sui diadici

- Esistenza del BM
- Verifica ipotesi thm di regolarità

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $B=(B_t)_{t\geq 0}$ il processo (canonico) che otteniamo applicando il thm di estensione (soddisfa 1) — 3) della def di BM)

$\forall s,t \in [0,1]$ e per ogni $n \geq 2$ calcolo

$$E[(B_s - B_t)^{2n}] = ?$$

$$3) \Rightarrow B_s - B_t \sim \mathcal{N}(0, |t-s|)$$

Sia $Z := \frac{B_s - B_t}{\sqrt{|t-s|}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ (check)

$$E[(B_s - B_t)^{\overset{a}{2n}}] = E[|t-s|^n Z^{2n}] = |t-s|^{\overset{b}{n}} \overbrace{E[Z^{2n}]}^{c}$$

non importa quanto vale

Allora q.c. B è α-Hölderiana su $D_{[0,1]}$ $\forall \alpha < \frac{b-1}{a} = \frac{n-1}{2n}$

Facendo l'intersezione su $n \to \infty$ trovo che

$$\boxed{\text{q.c. } B \text{ è } \alpha\text{-Hölder su } D_{[0,1]} \ \forall \alpha < \tfrac{1}{2}}$$

HW: estendere da $D_{[0,1]} := [0,1] \cap D$ a $\mathbb{R}_+ \cap D$, $D := \bigcup_{n\geq 0} 2^{-n}\mathbb{Z}$

- Costruiamo un nuovo processo $W = (W_t)_{t\geq 0}$ che soddisfi 1) — 4) (sarà una modificazione di B)

$$W_t(\omega) := \begin{cases} 0 & \text{se } B_\cdot(\omega) \text{ NON è } \alpha\text{-Hölder } \forall \alpha < \frac{1}{2} \\ B_t(\omega) & \text{se } t \in D \text{ e } B_\cdot(\omega) \text{ è } \alpha\text{-Höld } \forall \alpha < \frac{1}{2} \\ \lim_{\substack{s \to t \\ s \in D}} B_s(\omega) & \text{se } t \notin D \text{ e } B_\cdot(\omega) \text{ è } \alpha\text{-Höld } \forall \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$$

☆ Devo verificare che soddisfi 1) - 4)

☆ Hölder $\Rightarrow$ unif. continua

$\Rightarrow$ si estende con continuità alla chiusura dell'insieme di def.

(inoltre l'estensione è Hölder se lo era la restrizione)

4) $\boxed{\text{Perciò } \forall \omega \in \Omega, \ W_\cdot(\omega) \text{ è } \alpha\text{-Hölder } \forall \alpha < \frac{1}{2}}$ continuità ++

☆ Apriamo una parentesi sui modi di convergenza

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $X = (X_n)_{n\geq 1}$ successione di v.a. Z una v.a.

1) Convergenza quasi certa $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} Z$ se

$\exists H \in \mathcal{F} : P(H = 1)$ $\forall \omega \in H$ $X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} Z(\omega)$

= convergenza puntuale

$$L^p = L^p(\Omega) = L^p(\Omega; \mathbb{R}) = \left\{ Y \text{ v.a.} : \infty > \|Y\|_{L^p}^p := E[|Y|^p] \right\}$$

2) Convergenza in L^p $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} Z$ se

$\|X_n - Z\|_{L^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

3) Convergenza in probabilità $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} Z$ se

$\forall \varepsilon > 0$ $P(|X_n - Z| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

1) $\Rightarrow$ 3)

2) $\Rightarrow$ 3)

1) - - - -> 2) a volte : ci vuole conv. monotona o dominata

3) - - - -> 2) a volte : ci vuole la uniforme integrabilità

3) ha unicità del limite $X_n \xrightarrow{P} Y, X_n \xrightarrow{P} Z \Rightarrow Y = Z$ q.c.

$(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ X_n , $n \geq 1$ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Z tutte v.a.

4) Convergenza in legge / debole $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$, $X_n \longrightarrow Z$, $X_n \xrightarrow{w} Z$ se

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad P_n(X_n \in B) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(Z \in B)$

$$\mathcal{L}_{X_n}(B) \longrightarrow \mathcal{L}_Z(B)$$

☆ Dimostro che $\forall t$ $\quad W_t = B_t$ q.c.

($\Rightarrow$ W è modificazione di B $\Rightarrow$ W e B hanno stessa legge $\Rightarrow$ W soddisfa 1) − 3))

→ Se $t \in D$ ok per definizione + thm di regolarità

→ Se $t \notin D$ $\quad (s_n)_{n\geq 1}$ $\quad s_n \in D$ $\quad s_n \to t$

$B_{s_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} W_t$ q.c. per def + thm di reg.

$B_{s_n} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} B_t$ verifico :

$$E\left[(B_{s_n} - B_t)^2\right] = Var(B_{s_n} - B_t) \underset{3)}{=} |t - s_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

1) — 3) fatte

---

ora 10

PROCESSI GAUSSIANI

• **Def** ν misura di probabilità su $\mathbb{R}$ si dice Gaussiana o normale se :

1) $\nu \ll Leb$ e $\frac{d\nu}{dLeb} = f$ $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

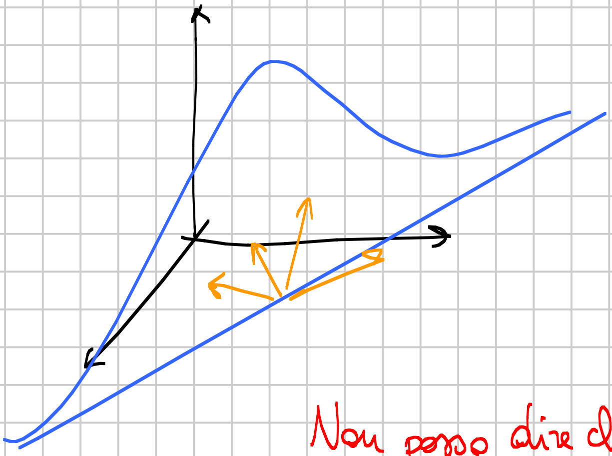
per $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$ opportune. Si denota $\nu = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

oppure

2) $\nu = \delta_\mu$ per $\mu \in \mathbb{R}$. Si denota $\nu = \mathcal{N}(\mu, 0)$

- **Def** X v.a. su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ si dice Gaussiana se lo è la sua legge

$X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ vettore aleatorio su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ si dice Gaussiano se $\forall a \in \mathbb{R}^d$ $a \cdot X$ è una v.a. Gaussiana



$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$(Z, -Z)$ vettore gaussiano

la sua misura non è assolutamente continua rispetto a $Leb(\mathbb{R}^2)$

Non posso dire che abbiamo sempre una densità

- Proprietà dei vettori gaussiani

X a valori in $\mathbb{R}^d$ è gaussiano allora $X_i \in L^2$ $\forall i = 1, 2, \dots, d$

$\mu_i := E(X_i)$ $\quad i = 1, 2, \dots, d$ $\quad$ vettore media

$\Sigma_{i,j} := Cov(X_i ; X_j)$ $\quad i,j = 1, 2, \dots, d$ $\quad$ matrice di covarianza

Si scrive $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ e la legge di X dipende solo da $\mu \in \mathbb{R}^d$ e $\Sigma \in M_d$

* La legge di X è assolutamente cont. risp $Leb(\mathbb{R}^d)$ se e solo se Σ è invertibile (= def positiva stretta)
e in quel caso la densità è:

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}$$

* Le componenti di X sono vvaa indipendenti se e solo se Σ è diagonale

↳ $\boxed{\text{In più se } X_i \text{ sono gaussiane e indip} \Rightarrow (X_1, \dots, X_d) \text{ è vett. gauss}}$

Covarianza e matrice di covarianza

$$\to \mathrm{Cov}(X;Y) := E\big[(X-E(X))(Y-E(Y))\big] \overset{(HW)}{=} E[XY]-E[X]E[Y]$$

HW: perché esista $\mathrm{Cov}(X;Y)$ basta $X,Y \in L^2$

i. X,Y indipendenti $\Rightarrow \mathrm{Cov}(X;Y)=0$ (basta $X,Y\in L^1$)

ii. (X,Y) vettore gauss $+\ \mathrm{Cov}(X;Y)=0 \Rightarrow X,Y$ indipendenti

iii. $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \le \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$ con l'uguaglianza sse $aX+bY=c$ q.c.

iv. $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Cov}(X;X)$

v. $\mathrm{Cov}(X;Y)=\mathrm{Cov}(Y;X)$

vi. $\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^m a_iX_i ; \sum_{j=1}^n b_jY_j\right) = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_ib_j\,\mathrm{Cov}(X_i;Y_j)$ (bilinearità)

★ La matrice di covarianza (vettore aleatorio qualsiasi) è $\boxed{\text{simmetrica}}$ e $\boxed{\text{semidef. positiva}}$

↳ $\forall a\in\mathbb{R}^d \quad a^T\Sigma a \ge 0$ verifico:

$$0 \le \mathrm{Var}(a\cdot X) := \mathrm{Cov}\left(\sum a_iX_i ; \sum a_jX_j\right) = \sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d a_ia_j\,\mathrm{Cov}(X_i;X_j) = a^T\Sigma a$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(a\cdot X) = a^T\Sigma a}$$

★ X come sopra $N\in M_{nd}$ allora NX vettore aleat. su $\mathbb{R}^n$

$\boxed{\text{La matrice di covarianza di } NX \text{ è data da } N\Sigma N^T}$

HW: verifica

★ Se Σ non è invertibile è comunque diagonalizzabile:

$\exists N\in M_d : NX \sim \mathcal{N}(N\mu, D)$ con D diagonale

quindi con componenti indipendenti

$\Rightarrow$ la sua legge è la legge prodotto delle singole componenti

HW: X vettore gaussiano $\Rightarrow NX$ vettore gaussiano

HW: $\mu \in \mathbb{R}^d$ Σ simmetrica def positiva stretta

$f(x) := \dots \mu \dots \Sigma \dots$

Allora se X ha legge con densità f, ha media μ e matrice di covarianza Σ

- **Def** Un processo stocastico a valori in $\mathbb{R}$ si dice Gaussiano se le sue leggi finito-dimensionali sono gaussiane

Owero $X = (X_i)_{i\in I}$ è gaussiano se $\forall \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subseteq I$

$$\boxed{(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n}) \text{ è un vettore gaussiano}}$$

★ Siccome dobbiamo ricondurci alla def di vettore G. siamo costretti a "numerare" $i_1, i_2, \dots, i_n$ invece del solito $J \subseteq I$

★ Un processo G. X si dice centrato se $E(X_i) = 0 \quad \forall i \in I$

- **Def** Se X è un processo G. la sua funzione di covarianza è

$$c_X : I \times I \to \mathbb{R}$$

$$\boxed{c_X(i,j) := \mathrm{Cov}(X_i ; X_j)}$$

★ c_X ha la proprietà che per ogni $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$ se definisco la matrice $Q \in M_n$ in questo modo:

$$Q_{jk} := c_X(i_j, i_k) = \mathrm{Cov}(X_j, X_k)$$

allora Q è simmetrica e semidefinita positiva
(infatti è la matrice di covarianza del vettore $(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n})$)

- **Prop.:** Il moto browniano è un processo gaussiano centrato con funzione di covarianza $\boxed{c(s,t) = \min(s,t)}$

1) $B = (B_t)_{t\geq 0}$ è un processo G.

Siano $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ e suppongo wlog $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$

$\forall a \in \mathbb{R}^n \quad Z := \sum_{i=1}^{n} a_i B_{t_i}$ devo mostrare che è gaussiana

def BM : $\begin{cases} B_0 = 0 \\ B_{t_1} - B_0, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \text{ indipendenti} \\ B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s) \end{cases}$

Il vettore $(B_{t_1} - B_0, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ è gaussiano perché ha componenti G. indipendenti

$$B_{t_k} = \sum_{i=0}^{k-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \qquad \text{dove ho posto } t_0 := 0$$

$$Z = \sum_{k=1}^{n} a_k B_{t_k} = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\sum_{k=i+1}^{n} a_k}_{b_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

2) B è centrato $\quad \forall t \geq 0$

$$E(B_t) = E(B_t - B_0 + B_0) = E(\underbrace{B_t - B_0}_{\sim \mathcal{N}(0,t)}) + E(\overset{0}{\overset{\shortparallel}{B_0}}) = 0 + 0$$

3) $c_B(s,t) = \min(s,t) \qquad \forall s,t \geq 0$

suppongo wlog $s \leq t \qquad \min(s,t) = s$

$$c_B(s,t) := Cov(B_s ; B_t) = Cov(B_s - B_0 ; B_s + B_t - B_s)$$

$$= Cov(B_s - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{B_0} ; B_s) + Cov(B_s - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{B_0} ; B_t - B_s) = Var(B_s - B_0) = s$$

Thm: Sia I un insieme e sia data $c : I \times I \to \mathbb{R}$ tale che $\forall i_1, i_2, \dots, i_n \in I \quad Q_{jk} := c(i_j, i_k)$ definisce una matrice Q simmetrica e semidefinita positiva. Allora $\exists !$ legge su $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ tale che il processo canonico è gaussiano, centrato, con funz. di covar. c

★ Generalizza una parte della esistenza del BM

$\star$ La dimostrazione si basa sul thm di estensione

HW: Che cosa devo chiedere in più alla funzione c perché ci siano traiettorie continue?

Dimostriamo qui la parte di compatibilità delle leggi finito-dim che non avevamo verificato neanche per il BM

La dim è più chiara perché non dipende dalla particolare forma della covarianza, ma solo dalla gaussianità

- Compatibilità leggi finito-dim

$$\mathbb{X} = \mathbb{R}^I \qquad \mathcal{G} = \mathcal{B}^{\otimes I} \qquad \forall J \subseteq I \quad \mathcal{L}^J \text{ assegnata}$$

Chi è $\mathcal{L}^J$ in questo caso?

$$c(i_1, i_2) = \mathrm{Cov}(\pi_{i_1} ; \pi_{i_2}) \qquad Q_{jk} = c(i_j, i_k)$$

$$(\pi_{i_1}, \pi_{i_2}, \dots \pi_{i_n}) \sim \mathcal{N}(0 ; Q)$$

---

ora 12

dato $B \in \mathcal{B}^{\otimes J}$ costruisco $\mathcal{L}^J$ ponendo:

$$\boxed{\mathcal{L}^J(B) := \mu_{\bar{J}}(\bar{B})}$$

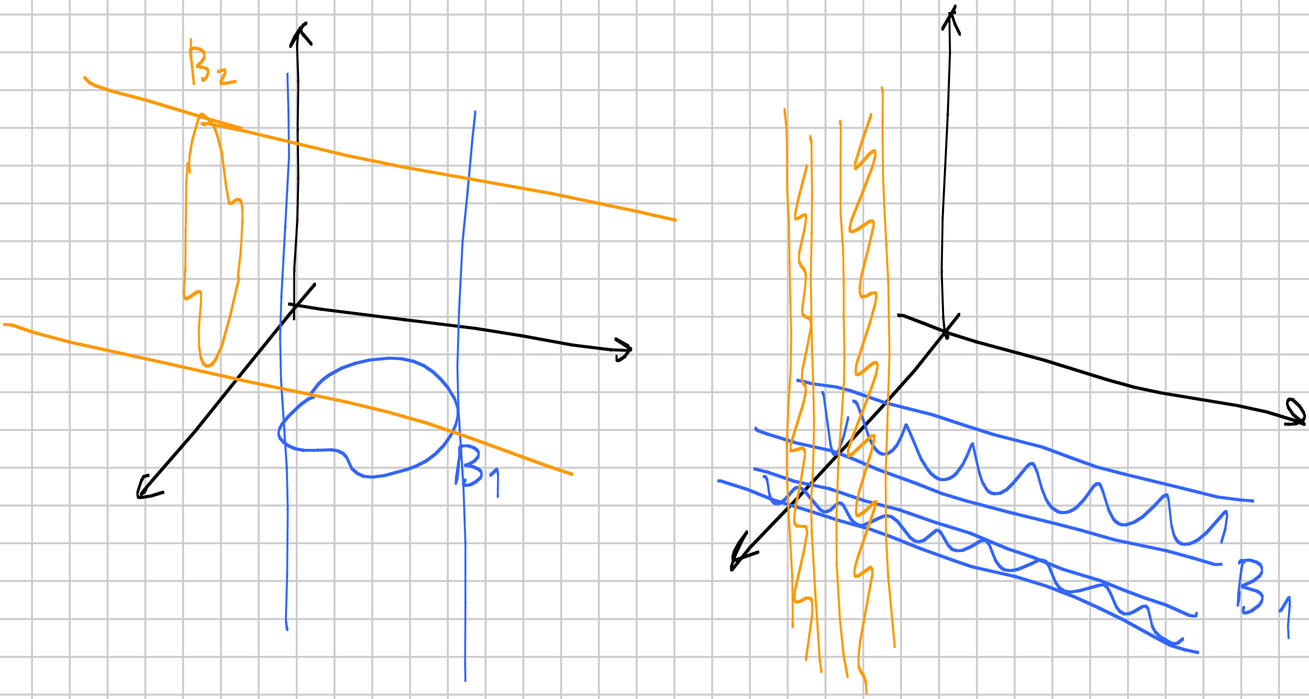
dove ....

- fissiamo wlog $J = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ sia $\bar{J} = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathbb{R}^n$
- sia $\mu_{\bar{J}}$ la legge su $\mathbb{R}^n$ di $\mathcal{N}(0, Q_{\bar{J}})$
- dove $Q_{\bar{J}}$ è definita da $[Q_{\bar{J}}]_{jk} := c(i_j, i_k)$
- per ogni $\mathbb{R}^n \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, sia $\varphi_x : J \to \mathbb{R}$ def da $i_k \mapsto x_k$
- sia $\bar{B} := \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_x \in B\}$

Devo verificare che $\forall J_1, J_2 \subseteq I$ finiti $\forall B_i \in \mathcal{B}^{\otimes J_i}$ $i=1,2$

tali che : $\underline{cyl_{J_1}(B_1) = cyl_{J_2}(B_2)}$

Si ha : $\mathcal{L}^{J_1}(B_1) = \mathcal{L}^{J_2}(B_2)$



- <u>Lemma</u> $cyl_{J_1}(B_1) = cyl_{J_2}(B_2)$ implica

$\exists B_\cap \in \mathcal{B}^{\otimes J_1 \cap J_2}$ t.c. $cyl_{J_1 \cap J_2}(B_\cap) = cyl_{J_i}(B_i)$ $i=1,2$

<u>Dim</u> : $A \subset \mathbb{X}$ $A := cyl_{J_i}(B_i)$ $i=1,2$

$E := \left\{ x \in \mathbb{X} : \exists y \in A \quad x\big|_{J_1 \cap J_2} = y\big|_{J_1 \cap J_2} \right\} \supseteq A$

faccio vedere $A = E$

$\forall x \in E \quad \exists y \in A \quad x\big|_{J_1 \cap J_2} = y\big|_{J_1 \cap J_2}$

pongo $x' := \begin{cases} x & su\ J_1^c \\ y & su\ J_1 \end{cases}$

$y \in A = cyl_{J_1}(B_1) \Rightarrow y\big|_{J_1} \in B_1 \Rightarrow x'\big|_{J_1} \in B_1 \Rightarrow x' \in A$

$x' \in A = cyl_{J_2}(B_2) \Rightarrow x'\big|_{J_2} \in B_2 \Rightarrow x\big|_{J_2} \in B_2 \Rightarrow x \in A$

Pongo $B_n := \{ w \in \mathbb{R}^{J_1 \cap J_2} : \exists y \in A : w = y|_{J_1 \cap J_2} \}$

Verifico l'identità nella tesi

$$cyl_{J_1 \cap J_2}(B_n) = \{ x \in \mathbb{X} : x|_{J_1 \cap J_2} \in B_n \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{X} : \exists y \in A : x|_{J_1 \cap J_2} = y|_{J_1 \cap J_2} \} =: E = A \qquad \square$$

- Verifichiamo la compatibilità

Step 1) mi posso ridurre a fare la verifica per $J_1 \subseteq J_2$

dati J_1 e J_2 qualsiasi : Lemma $\Rightarrow \exists B_n : cyl_{J_i}(B_i) = cyl_{J_1 \cap J_2}(B_n)$
allora basta dimostrare che :

$$\mathcal{L}^{J_1}(B_1) = \mathcal{L}^{J_1 \cap J_2}(B_n)$$

☆ $J_1 \subseteq J_2$, li numero così : $J_1 = \{ i_1, i_2, \dots, i_n \}$ $\quad J_2 = \{ \overbrace{i_1, \dots,}^{J_1} i_m \}$ $m \geq n$

Step 2) $\boxed{B_2 = \{ \alpha \in \mathbb{R}^{J_2} : \alpha|_{J_1} \in B_1 \}}$ B_1 è restrizione di B_1

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}^{J_2}$ sia $\tilde{\alpha}$ una estensione qualsiasi $\tilde{\alpha} \in \mathbb{X} = \mathbb{R}^I : \tilde{\alpha}|_{J_2} = \alpha$. Allora
$B_2 \ni \alpha = \tilde{\alpha}|_{J_2} \Leftrightarrow \tilde{\alpha} \in cyl_{J_2}(B_2) = cyl_{J_1}(B_1) \Leftrightarrow B_1 \ni \tilde{\alpha}|_{J_1} = \alpha|_{J_1}$

Step 3) $\boxed{\overline{B_2} = \overline{B_1} \times \mathbb{R}^{m-n}}$

ricordiamo $\forall B \in \mathcal{B}^J$ con $\#J = k$ $\overline{B} := \{ x \in \mathbb{R}^k : \varphi_x \in B \}$ e $\varphi_x : J \to \mathbb{R}$ $i_e \mapsto x_e$

Per ogni $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, sia $z = (x_1, x_2, \dots, x_n, z_{n+1}, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m$ estensione qualsiasi

$$z \in \overline{B_2} \Leftrightarrow \varphi_z \in B_2 \underset{\text{step 2)}}{\Leftrightarrow} B_1 \ni \varphi_z|_{J_1} = \varphi_x \Leftrightarrow x \in \overline{B_1}$$

Step 4) $\boxed{\mu_{\bar{J}_2}(A \times \mathbb{R}^{m-n}) = \mu_{\bar{J}_1}(A)}$ per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Sia $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ la proiezione sulle prime n componenti

$\bar{J}_1 = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ $\quad \bar{J}_2 = (i_1, i_2, \dots, i_n, \dots, i_m)$ $\quad \pi(\bar{J}_2) = \bar{J}_1$

Considero lo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, P) := (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}, \mu_{\bar{J}_2})$,

la funzione identità è un vettore gaussiano $\mathcal{N}(0, Q_2)$;

$\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è un vettore gaussiano di legge $\mathcal{N}(0, Q_1)$, infatti:

☆ Se $(X_1, X_2, \dots, X_m) \sim \mathcal{N}(0; Q_2)$, $\quad m \geq n \quad Q_2 = \left(\begin{array}{c|c} Q_1 & \\ \hline & \end{array} \right)$

allora $(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(0; Q_1)$ $\qquad$ HW: check

Posso concludere che la legge di π è $\mu_{\bar{J}_1} = \mathcal{L}_\pi = \pi(P) = \pi(\mu_{\bar{J}_2})$ ovvero

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\quad \mu_{\bar{J}_1}(A) = \mathcal{L}_\pi(A) = P(\pi \in A) = P(\omega \in \Omega : \pi(\omega) \in A)$

$$= \mu_{\bar{J}_2}(x \in \mathbb{R}^m : \pi(x) \in A) = \mu_{\bar{J}_2}(A \times \mathbb{R}^{m-n})$$

Conclusione: $\mathcal{L}^{J_2}(B_2) := \mu_{\bar{J}_2}(\bar{B}_2) \underset{\text{Step 3)}}{=} \mu_{\bar{J}_2}(\bar{B}_1 \times \mathbb{R}^{m-n}) \underset{\text{Step 4)}}{=} \mu_{\bar{J}_1}(\bar{B}_1) =: \mathcal{L}^{J_1}(B_1)$

HW: Sia B BM sia $Y = (Y_t)_{t \in [0,1]}$ $\quad Y_t = B_t - B_1 t$

(Brownian bridge)

verificare che è un processo G. centrato e trovare la funzione di covarianza

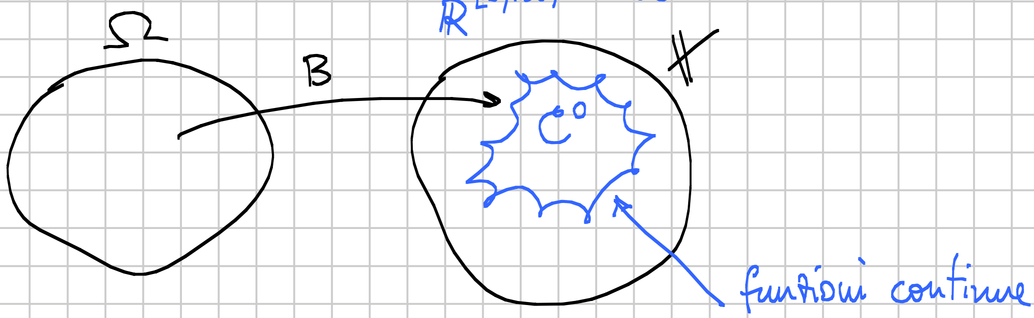
SPAZIO DI WIENER

= moto Browniano visto nello spazio delle funzioni continue

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ B un BM già costruito

$$B : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{G}, \mathcal{L}^B)$$

$\mathcal{X} = \mathbb{R}^{[0,+\infty)}$, $\mathcal{G} = \mathcal{B}^{\otimes[0,+\infty)}$, $\mathcal{L}^B$ legge indotta



$\forall \omega \in \Omega \quad B(\omega) \in \mathcal{C}^0$ per def

ma $\mathcal{C}^0 \notin \mathcal{G}$ allora:

$(\mathcal{C}^0, \mathcal{H}, \nu)$ spazio di Wiener : $\boxed{\text{la identità è un BM}}$

$\mathcal{H}$: traccia di $\mathcal{G}$ su $\mathcal{C}^0$; ν: legge di B su $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} := \{ A \cap \mathcal{C}^0 : A \in \mathcal{G} \}$$

check: è una σ-alg.

Come definisco ν ?

$$\forall H \in \mathcal{H} \quad \exists A \in \mathcal{G} : H = A \cap \mathcal{C}^0$$

$$\nu(H) := P(B \in A)$$

Q: è ben definita? $\quad A_1, A_2 \in \mathcal{G} : A_1 \cap \mathcal{C}^0 = A_2 \cap \mathcal{C}^0$

$$P(B \in A_1) = P(\{\omega \in \Omega : B_\cdot(\omega) \in A_1\})$$
$$\{\omega \in \Omega : B_\cdot(\omega) \in A_1, B_\cdot(\omega) \in \mathcal{C}^0\}$$
$$\{\omega \in \Omega : B_\cdot(\omega) \in H\}$$

fine

Motivazioni reloaded

$x' = f(x)$ ODE

$x' = f(x) + g(x)v$ SDE ?

vibrazione "derivata" del BM

x e v funzioni del tempo x_t, v_t

$$x'_t = f(x_t) + g(x_t)v_t$$

integro

$$x_t - x_0 = \int_0^t f(x_s)ds + \int_0^t g(x_s)v_s ds$$

$$\int_0^t g(x_s)v_s ds = \int_0^t g(x_s)v_s^+ ds - \int_0^t g(x_s)v_s^- ds$$

$v_t^+ = v_t \vee 0$

$v_t^- = (-v_t) \vee 0$

μ^+ misura su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mu^+(A) = \int_A v_s^+ ds \qquad V_t^+ := \mu^+([0,t]) = \int_0^t v_s^+ ds$$

$$\int_0^t g(x_s)dV_s^+ := \int_{[0,t]} g(x_s)\, d\mu^+(s) \underset{\text{check}}{=} \int_0^t g(x_s)v_s^+ ds$$

Questa definizione dell'integrale ha senso ogni volta che V^+ e V^- sono funzioni monotone crescenti (debolmente)

$$V_t := V_t^+ - V_t^-$$

$$\int_0^t g(x_s)v_s ds = \int_0^t g(x_s)dV_s$$

<u>Thm</u>: Le funzioni che si scrivono come differenza di due funzioni crescenti sono tutte sole le funzioni BV (a variazione totale finita)

$$f:[a,b]\to\mathbb{R}$$

$$\Delta_{[a,b]}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{(\delta_0,\delta_1,\dots,\delta_n)\in\mathbb{R}^{n+1}: a=\delta_0<\delta_1<\dots<\delta_n=b\right\}$$

$$I_f:\Delta_{[a,b]}\to\mathbb{R}_+$$

$$\delta\in\mathbb{R}^{n+1}\mapsto\sum_{i=1}^{n}|f(\delta_i)-f(\delta_{i-1})|$$

$$V_{[a,b]}(f):=\sup_{\delta\in\Delta_{[a,b]}} I_f(\delta) \qquad V(f)\in[0,+\infty]$$

- **Def** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è BV se $\forall a<b$ $V_{[a,b]}(f)<\infty$

$$\star \quad \boxed{x_t-x_0=\int_0^t f(x_s)\,ds+\int_0^t g(x_s)\,dV_s}$$

generalizza $x'=f(x)+g(x)v$
al caso in cui V sia una qualunque funzione BV

$$\boxed{\text{Purtroppo il BM non è assolutamente BV}}$$

$\star$ Una possibilità a volte utile è questa:

$$g(x_s)=G_s$$

se G_s è BV l'integrale si definisce anche se V non lo è
(integrando per parti)

$$\int_0^t G_s\,dV_s+\int_0^t V_s\,dG_s=G_tV_t-G_0V_0 \qquad \text{(check)}$$

(se entrambe BV)

$$\int_0^t G_s\,dV_s:=-\int_0^t V_s\,dG_s+G_tV_t-G_0V_0$$

(se G è BV e V non è BV)

$\star$ Questa idea rimane interessante e utile perché se $V_t=B_t$ dà una definizione di $\int_0^t G_s\,dB_s$ per ogni $\omega\in\Omega$

VARIAZIONE QUADRATICA

$a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$ intervallo chiuso qualsiasi

$$\Delta = \Delta_{[a,b]} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ (\delta_0, \dots, \delta_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \delta_0 = a < \delta_1 < \dots < \delta_n = b \}$$

partizioni finite di $[a,b]$

$\forall \delta \in \Delta \quad N_\delta \in \mathbb{N} : \delta \in \mathbb{R}^{N_\delta + 1}$

$\forall \delta \in \Delta \quad |\delta| = \max_{1 \le i \le N_\delta} |\delta_i - \delta_{i-1}|$ la mesh di δ

data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$I_f^{[a,b]} : \Delta \to \mathbb{R}_+ \qquad I_f(\delta) = \sum_{i=1}^{N_\delta} |f(\delta_i) - f(\delta_{i-1})|$$

$$S_f^{[a,b]} : \Delta \to \mathbb{R}_+ \qquad S_f(\delta) = \sum_{i=1}^{N_\delta} \left(f(\delta_i) - f(\delta_{i-1}) \right)^2$$

$$V^{[a,b]}(f) := \sup_{\delta \in \Delta_{[a,b]}} I_f(\delta) = \lim_{|\delta| \to 0} I_f(\delta)$$ variazione totale

solo se f è continua (HW)

$$Q^{[a,b]}(f) := \lim_{|\delta| \to 0} S_f(\delta)$$ variazione quadratica per funzioni

(definirla con il sup non funziona)

- Il processo stocastico variazione quadratica (in generale non è la stessa cosa di Q)

- <u>Def</u> $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $X = (X_t)_{t \ge 0}$ processo stocastico su $\mathbb{R}$

Si dice variazione quadratica di X se esiste, il limite:

$$\boxed{S_X^{[0,t]}(\delta) \xrightarrow[|\delta| \to 0]{P} \langle X \rangle_t}$$

$\rightarrow$ Si può denotare anche con $[X]_t$, $\langle X,X\rangle_t$, $[X,X]_t$

- Proprietà : $\langle X\rangle$ è un processo non decrescente con $\langle X\rangle_0 = 0$

Dim $s,t>0$

$$\langle X\rangle_{t+s} - \langle X\rangle_t = P\text{-}\lim_{\delta\in\Delta^{[0,t+s]}} S_X^{[0,t+s]}(\delta) - P\text{-}\lim_{\delta\in\Delta^{[0,t]}} S_X^{[0,t]}(\delta)$$

$\delta\in\Delta^{[0,t+s]}$ tali che t è uno dei punti di δ

$$= P\text{-}\lim_{\substack{\delta \text{ come}\\ \text{sopra}}} \left(S_X^{[0,t+s]}(\delta) - S_X^{[0,t]}(\delta)\right) = P\text{-}\lim_{\substack{\delta \text{ come}\\ \text{sopra}}} S_X^{[t,t+s]}(\delta) \geq 0$$

- Variazione quadratica del BM

Prop : $(\Omega,\mathcal{F},P)$ $B=(B_t)_{t\geq 0}$ un BM allora

$$\boxed{S_B^{[0,t]}(\delta) \xrightarrow[|\delta|\to 0]{L^2} t} \qquad \forall t\geq 0$$

In particolare $\langle B\rangle$ esiste e $\langle B\rangle_t = t$ q.c.

Dim Convergenza in L^2 significa :

$$E\left[\left(S_B^{[0,t]}(\delta) - t\right)^2\right] \xrightarrow[|\delta|\to 0]{} 0$$

Calcolo media e varianza di S_B

$$S_B = S_B^{[0,t]}(\delta) := \sum_{i=1}^{N_\delta} \left(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}\right)^2 \quad \text{è una v.a.}$$

$$E[S_B] = \sum_i E\Big[\underbrace{(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})}_{\substack{\text{incremento tra i tempi } \delta_{i-1} \text{ e } \delta_i\\ \sim \mathcal{N}(0,\,\delta_i-\delta_{i-1})}}{}^2\Big] = \sum_i \mathrm{Var}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) = \sum_i (\delta_i - \delta_{i-1}) = t$$

$$E\left[\left(S_B - \underset{\uparrow \; E(S_B)}{t}\right)^2\right] =: Var(S_B) = Var\Big(\sum_i \overbrace{\underbrace{(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})}_{\text{indipendenti al variare di } i}{}^2}^{\text{indip. al variare di } i}\Big) = \sum_i Var\left(\left(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}\right)^2\right)$$

HW: Se $(X_i)_{i\in I}$ sono indipendenti e $(f_i)_{i\in I}$ sono misurabili $: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$
Allora $(f_i(X_i))_{i\in I}$ sono indipendenti

$$Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$$Var(Z^2) = E(Z^4) - E(Z^2)^2 = E[Z^4] - \sigma^4$$

$$X := \frac{1}{\sigma} Z \qquad X \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad Z = \sigma X$$

$$E(Z^4) = E(\sigma^4 X^4) = \sigma^4 E(X^4) = \underset{\uparrow \; \text{fa } 3}{\tilde{c}}\,\sigma^4$$

$$Var(Z^2) = c\,\sigma^2 \qquad c > 0 \qquad (\text{in realtà } c = 2)$$

Continuo:

$$Var(S_B) = \sum_i c(\delta_i - \delta_{i-1})^2 \leq c \overbrace{\max_i (\delta_i - \delta_{i-1})}^{=:|\delta|} \overbrace{\sum_i (\delta_i - \delta_{i-1})}^{t}$$

$$\leq c t |\delta|$$

Ho dimostrato il limite in L^2 (che $\Rightarrow$ limite in P)

☆ In generale per ogni successione $\delta^{(n)}$ tale che $|\delta^{(n)}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
esiste una sottosuccessione n_k tale che

$$\boxed{S_B(\delta^{(n_k)}) \xrightarrow[k\to\infty]{q.c.} t} \qquad \text{per il BM}$$

☆ Abbiamo la garanzia che il limite sia q.c. anche se ci limitiamo a supporre una di queste due condizioni

i. $\delta^{(n)}$ tale che $\sum_{n\geq 1} |\delta^{(n)}| < \infty$ (per B-C 1)

ii. $\delta^{(n)}$ crescente nel senso che $\delta^{(n+1)}$ ha tutti i punti di $\delta^{(n)}$ $\forall n$

IRREGOLARITÀ DELLE TRAIETTORIE DEL BM

Teorema: Quasi certamente le traiettorie del BM sono:

1) Non derivabili in alcun punto
2) Non BV
3) Non α-Hölderiane per $\alpha \geq \frac{1}{2}$

Dim: 2) e 3) col $> \frac{1}{2}$

fisso $a<b$ $\quad (\delta^{(n)})_{n\geq 1} \quad \delta^{(n)} \in \Delta_{[a,b]} \quad |\delta^{(n)}| \to 0$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e $B = (B_t)_{t\geq 0}$ BM.

$$S_B^{[a,b]}(\delta^{(n)}) = \sum_{i=1}^{N_\delta} \left(B_{\delta_i^{(n)}} - B_{\delta_{i-1}^{(n)}}\right)^2 \quad \text{è una v.a.}$$

Sappiamo che $S_B^{[a,b]}(\delta^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \langle B\rangle_b - \langle B\rangle_a = b-a$

(check: basta completare $\delta^{(n)}$ a $\tilde{\delta}^{(n)} \in \Delta_{[0,b]}$ con uguale mesh)

A patto di prendere una sottosuccessione la convergenza è q.c.
Quindi $\exists (\delta^{(n)})_{n\geq 1}$ tale che il limite è q.c.

$$I_B^{[a,b]}(\delta^{(n)}) = \sum_{i=1}^{N_\delta} \left|B_{\delta_i^{(n)}} - B_{\delta_{i-1}^{(n)}}\right|$$

$$S_B^{[a,b]}(\delta^{(n)}) \leq \max_{i=1,\dots,N_\delta} \left|B_{\delta_i^{(n)}} - B_{\delta_{i-1}^{(n)}}\right| \, I_B^{[a,b]}(\delta^{(n)})$$

★ Le traiettorie di B sono continue quindi unif. continue su $[a,b]$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta=\delta(\omega)>0 : \ \forall s,t \in [a,b] : |s-t| < \delta(\omega) \Rightarrow |B_t(\omega) - B_s(\omega)| < \varepsilon$

applico a $s = \delta_i^{(n)} \quad t = \delta_{i-1}^{(n)}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\omega) : \quad \forall n \geq n_0 \quad |\delta^{(n)}| \leq \delta(\omega)$

$$\Rightarrow \max_i \left| B_{\delta_i^{(n)}} - B_{\delta_{i-1}^{(n)}} \right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad I_B(\delta^{(n)}) \geq S_B(\delta^{(n)}) \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

Voglio fare il limite $n \to \infty$

$\exists\, H \in \mathcal{F},\ P(H) = 1 : \quad \forall \omega \in H \quad \lim_{n\to\infty} S_{B(\omega)}(\delta^{(n)}) = b-a$

$$\forall \omega \in H \quad \liminf_{n\to\infty} I_{B(\omega)}(\delta^{(n)}) \geq \frac{b-a}{\varepsilon}$$

Per l'arbitrarietà di ε (H non dipendeva da ε)

$$V^{[a,b]}(B_\cdot(\omega)) \geq \liminf_n I_{B(\omega)}(\delta^{(n)}) = +\infty \qquad \text{(fine 2)}$$

Sia $\omega \in \Omega$: $\alpha > \frac{1}{2}$ $\quad |B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leq C(\omega)|t-s|^\alpha \quad \forall t,s \in [a,b]$

Applico a $s = \delta_i^{(n)}$ $\quad t = \delta_{i-1}^{(n)}$ / faccio il quadrato e sommo

$$S_{B(\omega)}^{[a,b]}(\delta^{(n)}) = \sum_{i=1}^{N_\delta} \left(B_{\delta_i^{(n)}}(\omega) - B_{\delta_{i-1}^{(n)}}(\omega) \right)^2 \leq C(\omega)^2 \sum_i \left(\delta_i^{(n)} - \delta_{i-1}^{(n)} \right)^{\overbrace{2\alpha-1}^{\beta}+1}$$

$$\leq C(\omega)^2 \max_i \left(\delta_i^{(n)} - \delta_{i-1}^{(n)} \right)^\beta (b-a) \leq C(\omega)^2 |\delta^{(n)}|^\beta (b-a)$$

Perciò se $\omega \in \Omega$ è tale che $B_\cdot(\omega)$ è α-Höld allora

$$S_{B(\omega)}^{[a,b]}(\delta^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ma il limite q.c. è $b-a$ perciò $\omega \in H^c$ $\qquad$ (fine 3)

$$\int_0^t X_s \, dB_s$$

proprietà sul processo integrando

FILTRAZIONI, PROCESSI ADATTATI E PROGRESSIVAMENTE MISURABILI

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità

- **Def** Una filtrazione è una famiglia crescente di sotto-σ-alg. di $\mathcal{F}$

Tipicamente : $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ o $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$

$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \quad \forall s \leq t \qquad \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F} \quad \forall s$

- **Def** Dato un processo $X = (X_t)_{t \geq 0}$ la sua filtrazione naturale è

$$\boxed{\mathcal{F}_t := \sigma\left((X_s)_{s \in [0,t]} \right)} \qquad \forall t \geq 0$$

★ L'idea intuitiva è che $\mathcal{F}_t$ rappresenta la conoscenza (del processo) fino al tempo t (nel caso di filt. naturale)

- **Def** Un processo $X = (X_t)_{t \geq 0}$ si dice adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ se $\forall t \geq 0$

X_t è $\mathcal{F}_t$ - misurabile

↳ ovviamente anche X_s, $s < t$

★ Entrambe le def si applicano anche ai tempi discreti

★ Ogni processo è adattato alla propria filt. naturale

- **Def** Si chiama spazio filtrato uno spazio di prob. con una filtrazione : $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{F}, P)$

- **Def** Un processo $X = (X_t)_{t \geq 0}$ su uno spazio filtrato si dice progressivamente misurabile se $\forall t \geq 0$

$$\boxed{X\big|_{\Omega\times[0,t]} \text{ è } \mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}([0,t])\text{ - misurabile}}$$

- **Thm:** X processo su uno spazio $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},P)$ $\boxed{\text{completo}}$

  i. X progr. mis. $\Rightarrow$ X adattato risp. alla filtr.

  ii. X adattato alla filtr. + X ha q.c. traiettorie cont. a dx (oppure a sx) $\Rightarrow$ X è progr. mis.

Dim i. $t>0$, $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad X_t^{-1}(A)\overset{?}{\in}\mathcal{F}_t$

$Y:=X\big|_{\Omega\times[0,t]}$ $\qquad Y:(\Omega\times[0,t],\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B})\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$

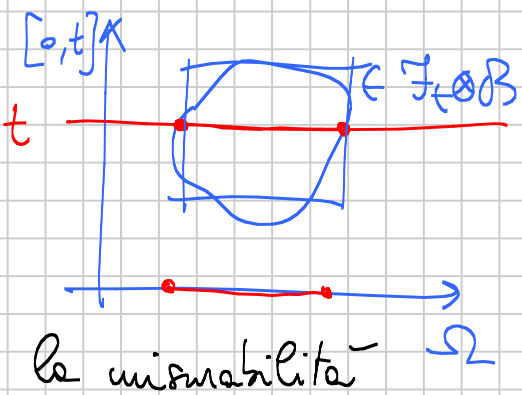
$A\in\mathcal{B}$ $\quad Y^{-1}(A)\in\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}$ $\quad$ lo interseco con $\Omega\times\{t\}\in\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}$

$$\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}\ni Y^{-1}(A)\cap(\Omega\times\{t\})=\{(\omega,t):Y(\omega,t)\in A\}=X_t^{-1}(A)\times\{t\}$$

$\varphi:\omega\mapsto(\omega,t)$ $\qquad \varphi:\ \Omega\to\Omega\times\mathbb{R}$

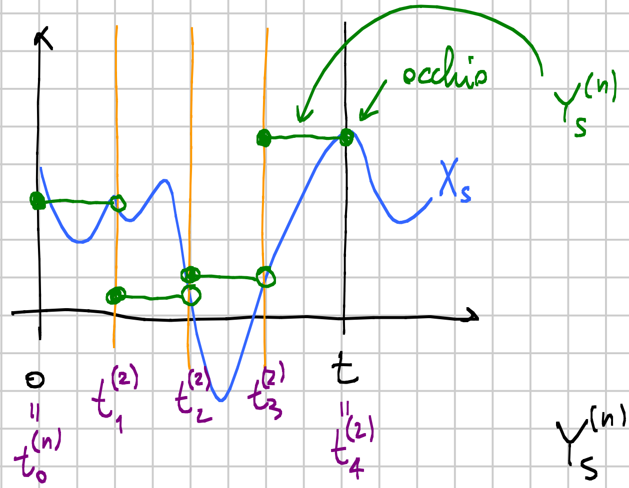
$X_t=Y\circ\varphi\ :\Omega\to\mathbb{R}$

$$\varphi:(\Omega,\mathcal{F}_t)\to(\Omega\times[0,t],\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B})$$
$$Y:(\Omega\times[0,t],\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B})\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$$



Posso verificare la misurabilità sui generatori.

ii.



Suppongo X q.c. cont. a dx

$n \geq 1$

$$t_k^{(n)} = \frac{k}{2^n} t \qquad k = 0, 1, \dots, 2^n$$

$$Y_s^{(n)} := \begin{cases} X_t & s = t \\ X_{t_{k+1}^{(n)}} & t_k^{(n)} \leq s < t_{k+1}^{(n)} \quad k < 2^n \end{cases}$$

<u>Step 1</u> $\forall \omega \in \Omega$: $X_\cdot(\omega)$ è cont. a dx

$\forall s \in [0,t] \qquad Y_s^{(n)}(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X_s(\omega)$

$\to$ $s = t$ banale $\quad Y_t^{(n)} \equiv X_t$

$\to$ $s \in [0,t)$ $\;n$ fissato, sia $k = k(n)$: $t_{k-1}^{(n)} \leq s < t_k^{(n)}$

$$Y_s^{(n)} = X_{t_k^{(n)}}$$

$n \to \infty \qquad t_{k(n)}^{(n)} \searrow s \qquad X_\cdot(\omega)$ cont. a dx

$$Y_s^{(n)}(\omega) = X_{t_{k(n)}^{(n)}}(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X_s(\omega)$$

Da adesso lun 15.30 – 17.30 aula B

Step 2 : $Y^{(n)}$ è $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}$ misurabile $\forall n \geq 1$

$$\boxed{\begin{array}{l} n \geq 1 \\ t_k^{(n)} = \frac{k}{2^n} t \qquad k = 0, 1, \dots, 2^n \\ Y_s^{(n)} := \begin{cases} X_t & s = t \\ X_{t_{k+1}^{(n)}} & t_k^{(n)} \leq s < t_{k+1}^{(n)} \quad k < 2^n \end{cases} \end{array}}$$

$$Y^{(n)} : \underset{?}{\Omega \times [0,t]} \to \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}}$$

$A \in \mathcal{B}$

$$(Y^{(n)})^{-1}(A) = \{(\omega, t) : X_t(\omega) \in A\} \cup \bigsqcup_{k=1}^{2^n} \{(\omega, s) : s \in [t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}), X_{t_k^{(n)}}(\omega) \in A\}$$

$$= \underbrace{X_t^{-1}(A)}_{\mathcal{F}_t} \times \{t\} \cup \bigsqcup_{k=1}^{2^n} \underbrace{X_{t_k^{(n)}}^{-1}(A)}_{\mathcal{F}_{t_k^{(n)}} \subseteq \mathcal{F}_t} \times \underbrace{[t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)})}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}$$

Step 3 : Faccio il limite e chiudo

$\tilde{Y} := \limsup_{n \geq 1} Y^{(n)}$ è per costruzione è $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}$ - mis.

X ha traiettorie q.c. continue a dx $\longrightarrow \exists H \in \mathcal{F}, P(H) = 1$

$X_\cdot(\omega)$ cont a dx $\Rightarrow X_\cdot(\omega) = \lim_n Y_\cdot^{(n)}(\omega)$ $\qquad X|_{H \times [0,t]} = \tilde{Y}|\dots$

$A \in \mathcal{B}$

$$\left(X|_{\Omega\times[0,t]}\right)^{-1}(A) = \Big[\underbrace{\left(X|_{\Omega\times[0,t]}\right)^{-1}(A) \cap H^c \times [0,t]}_{\subseteq H^c\times[0,t]} \Big]^{G} \cup$$

$$\cup \Big[\underbrace{\varphi^{-1}(A)}_{\in \mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}} \cap H \times [0,t] \Big]$$

$H \in \mathcal{F}$ $\quad P(H) = 1 \quad P(H^c) = 0 \quad H^c \in \mathcal{F}_0 \quad \overbrace{H^c \times [0,t]}^{F} \in \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}$

$G \cap F \subseteq F \qquad F \in \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}$ $\square$

- **Def** Uno spazio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ si dice completo se $\forall A \subseteq \Omega$ t.c. $\exists H \in \mathcal{F}$ $A \subseteq H$ $P(H) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{F}$

- **Def** Uno spazio filtrato $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq0}, \mathcal{F}, P)$ si dice completo se $(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$ è completo.

MOTO BROWNIANO RISPETTO AD UNA FILTRAZIONE

- **Def** Dato $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq0}, \mathcal{F}, P)$ e B un BM diciamo che B è BM rispetto alla filtrazione se:
  i. è adattato
  ii. $\forall s<t$ $\quad B_t - B_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$

★ i. significa che la filtrazione deve essere abbastanza grande, contenendo quella naturale

ii. significa che la filtrazione deve essere non troppo grande. Il futuro di B_t indipendente dal passato di $\mathcal{F}_t$

$(X_t)_{t\geq0} \qquad (B_t)_{t\geq0} \qquad \int X_s \, dB_s$

$\mathcal{F}_t$ conosce X_t e B_t ed è indip dal futuro di B

- Il BM è un BM rispetto alla sua filtrazione naturale

Prop: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, B un BM $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtr. nat.

Allora $\forall s<t$ $B_t - B_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$

Serve:

$\boxed{\text{Si può verificare l'indipendenza fra due } \sigma\text{-alg su dei generatori che siano } \pi\text{-system}}$

Prop: $(\Omega, \mathcal{H}, P)$, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{H}$

$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$, $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{B})$ $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ π-system

$\forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, \quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Allora $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono indipendenti

Dim fisso $A \in \mathcal{A}$ definisco μ_1 e μ_2 su $(\Omega, \mathcal{G})$

$\mu_1(G) := P(A \cap G)$
$\mu_2(G) := P(A)P(G)$
sono due misure finite

coincidono su $\mathcal{B}$ $\Rightarrow$ coincidono su $\mathcal{G}$

$\forall A \in \mathcal{A}, B \in \cancel{\mathcal{B}}\ \mathcal{G}, \quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$

fisso $G \in \mathcal{G}$ definisco ν_1 e ν_2 su $(\Omega, \mathcal{F})$

$\nu_1(F) := P(F \cap G)$
$\nu_2(F) := P(F)P(G)$
sono due misure finite

coincidono su $\mathcal{A}$ $\Rightarrow$ coincidono su $\mathcal{F}$ $\square$

Dim $\mathcal{F}_s = \sigma\big(\underbrace{(B_u)_{u\in[0,s]}}\big) = \sigma\big((B_u)_{u \in J \subseteq [0,s]}\big)$

$\bar{B} : \Omega \to \mathbb{R}^{[0,s]} = \mathcal{X} = S^I \qquad (S, \mathcal{A})$

$$\bar{B} : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{X}, \mathcal{G}) \qquad \mathcal{G} = \mathcal{A}^{\otimes I} = \mathcal{B}^{\otimes [0,s]} = \sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{D})$$

$$\sigma(\bar{B}) = \bar{B}^{-1}(\mathcal{G}) = \{ \bar{B}^{-1}(G) : G \in \mathcal{G} \} \qquad \mathcal{C} \quad \mathcal{D}$$

$$= \bar{B}^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(\bar{B}^{-1}(\mathcal{C}))$$

$$= \sigma$$

$$\mathcal{C} = \bigsqcup_{\substack{J \subseteq I \\ |J| < \infty}} \mathcal{C}_J \qquad \mathcal{C}_J = \left\{ cyl_J \left(\prod_{i \in J} A_i \right) : A_i \in \mathcal{A} \right\}$$

$$cyl_J \left(\prod_{i \in J} A_i \right) = \left\{ x \in \mathbb{X} : x|_i \in A_i \ \forall i \in J \right\}$$

$$\sigma(\bar{B}) = \sigma\left(\bigsqcup_{u_i, A_i} \{ \omega \in \Omega : B_{u_i} \in A_i \ \forall i = 1, 2, \dots, n \} \right)$$

$\forall n \geq 1 \quad \forall u \in [0,s]^n \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad u_i \in [0,s]$

$\forall \ A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B} \qquad A = (A_1, \dots, A_n)$

$$F(n, u, A) := \{ \omega \in \Omega : B_{u_i} \in A_i \ \forall i = 1, 2, \dots, n \}$$

$$\sigma(\bar{B}) = \sigma\Big(\underbrace{\bigsqcup_{\substack{n \geq 0 \\ u, A}} F(n, u, A)}_{\pi\text{-system}} \Big) \qquad F(0, ?, ?) = \Omega$$

Basta verificare indipendenza fra $B_t - B_s$ e ciascuno degli $F(\,)$

$n \geq 1$, u, A fissati sia $r_1 = u_{(1)}, r_2 = u_{(2)}, \dots, r_n = u_{(n)}$

$r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$

$B_{r_2} - B_{r_1}, \quad B_{r_3} - B_{r_2}, \dots, \quad B_{r_n} - B_{r_{n-1}}, \quad B_t - B_s$

sono tutte v.a. indipendenti per la def di BM

oppure perché sono nulle

$F(n, u, A)$ dipende solo dalle prime, e quindi è indipendente dall'ultima.

PROCESSI CHE SI INTEGRANO

Sia $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ spazio filtrato

B un BM rispetto alla filtrazione

fisso a, b $\quad 0 \leq a < b$

$$M^2_{a,b} := \{ X \text{ processo stocastico progr. mis.} \} \cap L^2(\Omega \times [a,b], P \times \mathcal{L})$$

$X \in L^2$ se $\displaystyle\int_a^b E X_t^2 \, dt =: \|X\|^2_{M^2_{a,b}} < \infty$

Definiremo l'integrale stocastico per questi processi

$$I : M^2_{a,b} \longrightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

$$I(X) = \int_a^b X_s \, dB_s \qquad \text{notazione}$$

SPERANZA CONDIZIONALE

- **Def** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ denoto con L^p $p \in [1, +\infty]$ lo spazio di Banach definito dall'insieme delle variabili aleatorie da $(\Omega, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ con la norma:

$$\|X\|_{L^p}^p := E(|X|^p) \qquad \text{finita.}$$

→ Not: $L^p = L^p(\Omega) = L^p(\Omega; \mathbb{R}) = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$

★ $p = \infty$ HW

- **Def** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $X \in L^1$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sotto σ-alg. Allora diciamo che una v.a. Y è una versione della speranza condizionale di X rispetto a $\mathcal{G}$ e scriviamo:

$$Y = E[X | \mathcal{G}] \quad \text{q.c.}$$

se:

1) $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ (cioè $\sigma(Y) \subseteq \mathcal{G}$)

2) $\forall G \in \mathcal{G} \quad E(X; G) = E(Y; G)$

★ Not: $E(X; G) = \int_G X \, dP = E[X \mathbb{1}_G]$ $\qquad E(X) = \int_\Omega X \, dP$

★ Moralmente: La v.a. Y è X supponendo note le informazioni di $\mathcal{G}$ e facendo la media su tutto il resto

★ Frequentemente $\mathcal{G} = \sigma(Z)$

Not: $E(X|Z) := E(X|\sigma(Z))$

★ Esempi facili

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ X, Y i punteggi di due dadi onesti indipendenti

A. $E(X+Y|X) = X+\frac{7}{2}$ q.c.

definizione? 1) $X+\frac{7}{2} \in L^1(\Omega,\sigma(X),P)$ sì

2) $\forall G\in\sigma(X)$ $\exists B\in\mathcal{B}: G = X^{-1}(B)=\{\omega: X(\omega)\in B\}$

$$E(X+Y;G) = E(X\mathbb{1}_G + Y\mathbb{1}_G) = E(X\mathbb{1}_G) + E(Y\mathbb{1}_{X\in B}) = E(X\mathbb{1}_G)+\underbrace{E(Y)}_{=\frac{7}{2}}E(\mathbb{1}_G)$$

indip.

$$= E\left(X+\frac{7}{2}; G\right)$$

B. $E(X|X+Y) = \frac{X+Y}{2}$

C. $E(X|Y)=\frac{7}{2}$

D. $E(XY|Y)=$ E. $E(X|XY)=$ (HW)

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ $(S_n)_{n\geq 0}$ S.S.R.W. $S_0=0$ q.c. $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$ dove $(X_i)_{i\geq 1}$ v.a. iid.

$$P(X_i=1)=P(X_i=-1)=\frac{1}{2}$$

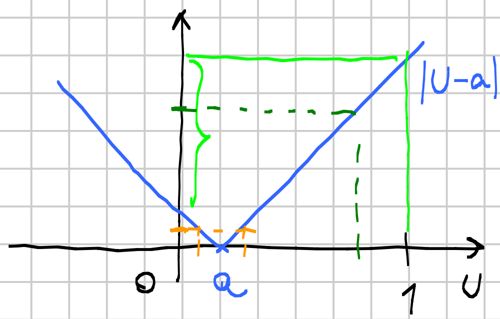
F. $E(S_{n+1}|S_n)=$ G. $E(S_m|S_n)=$ $m>n$ (HW)

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ $U\sim unif(0,1)$

H. $E(U|U^2) = U$ q.c.

I. $E(U|(U-a)^2) = E(U|\,|U-a|)$

$$= \begin{cases} U & |U-a|\geq a \\ a & |U-a|<a \end{cases}$$



HW: Esempi ora 18 del 2013 sul BM

★ Se $Y = E(X|Z)$ q.c. allora Y è $\sigma(Z)$-misurabile e quindi (Lemma di Doob) esiste $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile : $Y = \varphi(Z)$

$$\boxed{E(X|Z) = \varphi(Z) \quad \text{q.c.} \quad \text{per } \varphi \text{ opportuna}}$$

• Nella def di speranza condizionale si può indebolire la 1)

$$\boxed{1^+) \quad Y \text{ è } \mathcal{G}\text{-misurabile}}$$

HW: $1^+) + 2) \Rightarrow 1)$ (cfr ora 18 2013)

■ PROPRIETÀ DELLA SPERANZA CONDIZIONALE

$(\Omega, \mathcal{F}, P) \quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \quad X \in L^1$

(a) $E(E(X|\mathcal{G})) = E(X)$

Dim Sia $Y = E(X|\mathcal{G})$, $G = \Omega \in \mathcal{G}$ $\quad 2) \Rightarrow E(Y) = E(X)$ □

(b) Se X è $\mathcal{G}$-misurabile, allora $X = E(X|\mathcal{G})$ q.c.

Dim per definizione

ora 20

(c) Linearità : $X, Y \in L^1 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\tilde{X} = E(X|\mathcal{G})$ q.c. $\qquad \tilde{Y} = E(Y|\mathcal{G})$ q.c.

Allora $\alpha\tilde{X} + \beta\tilde{Y} = E(\alpha X + \beta Y|\mathcal{G})$ q.c.

1) $L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ è s.v. $\Rightarrow \alpha\tilde{X} + \beta\tilde{Y} \in L^1$

2) $\forall G \in \mathcal{G} \quad E[(\alpha X + \beta Y)\mathbb{1}_G] = \alpha E(X\mathbb{1}_G) + \beta E(Y\mathbb{1}_G)$

lin di E

$= \alpha E(\tilde{X}\mathbb{1}_G) + \beta E(\tilde{Y}\mathbb{1}_G) \stackrel{\downarrow}{=} E[(\alpha\tilde{X} + \beta\tilde{Y})\mathbb{1}_G]$ □

2) di $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$

(d) Positività : $X \geq 0$ q.c. $Y = E(X|\mathcal{G})$ q.c. $\Rightarrow Y \geq 0$ q.c.

Dim RPA $\exists \varepsilon > 0 : P(Y \leq -\varepsilon) > 0$

Y è $\mathcal{G}$-mis. $\Rightarrow \{Y \leq -\varepsilon\} \in \mathcal{G}$

$2) \Rightarrow E(X; Y \leq -\varepsilon) = E(Y; Y \leq -\varepsilon) \leq -\varepsilon P(Y \leq -\varepsilon) < 0$

assurdo

(e) (cMON) Convergenza monotona condizionale

$(X_n)_{n\geq 1}$ $X_n \in L^1$ $X_n \geq 0$ q.c. $X_n \nearrow X$ q.c. $X \in L^1$

Sia data $(Y_n)_{n\geq 1}$: $\forall n \geq 1$ $Y_n = E(X_n|\mathcal{G})$ q.c.

Allora $Y_n \nearrow Y$ q.c. e in L^1 e $Y = E(X|\mathcal{G})$ q.c.

Dim $\forall n \geq 1$ $Y_{n+1} - Y_n \underset{\text{lin (c)}}{=} E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{G}) \underset{(d)}{\geq} 0$ q.c.

$Y_n \nearrow Y$ q.c.

devo dimostrare che $Y = E(X|\mathcal{G})$ q.c.

$Y = \sup_n Y_n \Rightarrow Y$ è $\mathcal{G}$-mis $\Rightarrow 1^+) \Rightarrow 1)$

$\Rightarrow$ convergenza in L^1

2) ? $\forall G \in \mathcal{G}$ $E(X \mathbb{1}_G) \overset{?}{=} E(Y \mathbb{1}_G)$

$E(X_n \mathbb{1}_G) = E(Y_n \mathbb{1}_G)$ mando $n \to \infty$ $\square$

(f) Lemma di Fatou condizionale

$(X_n)_{n\geq 1}$ $X_n \in L^1$ $X_n \geq 0$ $\forall n$

$$E(\liminf_n X_n | \mathcal{G}) \leq \liminf_n E(X_n|\mathcal{G}) \text{ q.c.}$$

Dim : HW

(g) (cDOM) Convergenza dominata condizionale

$(X_n)_{n\geq 1}$ $X_n \in L^1$ $\forall n$

$|X_n| \leq V$ q.c. $\forall n \geq 1$ $V \in L^1$, $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} X$

Allora $E(X_n|\mathcal{G}) \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} E(X|\mathcal{G})$ e in L^1

Dim: HW

ESISTENZA & UNICITÀ

- UNICITÀ

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ $X, Y_1, Y_2 \in L^1$ Y_1 e Y_2 versioni di $E(X|\mathcal{G})$

Allora $Y_1 = Y_2$ q.c.

Dim Per linearità $Y_1 - Y_2$ è una versione della speranza condizionale di $X - X = 0$ rispetto a $\mathcal{G}$

Per positività tutte le versioni della sp.c. di 0 sono ≥ 0 q.c. ($e \leq 0$ q.c.) $\Rightarrow Y_1 = Y_2$ q.c. □

- ESISTENZA (facile dando per buono thm di Radon-Nicodym)

$(\Omega, \mathcal{F})$ μ, ν misure con $\nu \ll \mu$ $(\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0)$

Allora $\exists f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ $f = \frac{d\nu}{d\mu}$: $\forall A \in \mathcal{F}$ $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$

Dim (esistenza speranza condizionale)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $X \in L^1$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ $Y = ?$

$X = X^+ - X^-$ $X^{\pm} \in L^1$

Introduco due misure ν^+ e ν^- in $(\Omega, \mathcal{G})$

$$\nu^{\pm}(G) := \int_G X^{\pm} \, dP \qquad \nu^{\pm} \ll P$$

Per R-N $\exists f^{\pm} \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$: $\forall G \in \mathcal{G}$ $\nu^{\pm}(G) = \int_G f^{\pm} \, dP$

Allora $f^+ - f^-$ è una vers. della sp.c. di X risp a $\mathcal{G}$

★ Osservazione

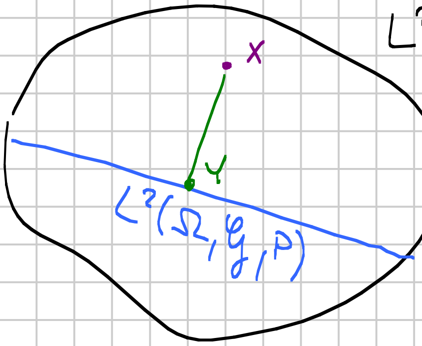
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ X come densità definisce una misura $\nu \ll P$

$$\nu(A) := \int_A X \, dP \qquad \forall A \in \mathcal{F}$$

Restringendo ν a $\mathcal{G}$ X non è più una densità con la misurabilità giusta, ma per R-N deve esisterne una

■ ESISTENZA SPERANZA CONDIZIONALE (senza R-N)

Si fa prima per $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e poi $X \in L^1$
(da L^2 a L^1 per densità con cMON)



$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$

sottospazio lineare chiuso

Y proiezione ortogonale di X nel sottospazio

$\langle X - Y, Z \rangle_{L^2} = 0 \quad \forall Z \in L^2(\mathcal{G}) \qquad G \in \mathcal{G} \qquad Z = \mathbb{1}_G$

$\langle u, v \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = \int_\Omega uv \, dP = E(uv)$

$0 = \langle X - Y, \mathbb{1}_G \rangle = E(X \mathbb{1}_G) - E(Y \mathbb{1}_G) \iff E(X; G) = E(Y; G)$

ortogonalità $\Rightarrow$ prop 2) della def

Dim $\boxed{\text{caso } X \in L^2(\mathcal{F})}$

$h := \inf \{ \|X - Z\|^2 : Z \in L^2(\mathcal{G}) \} \geq 0$

$\exists (Z_n)_{n \geq 1}, \ Z_n \in L^2(\mathcal{G}) : \|X - Z_n\|^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} h$

$\forall m, n \geq 1 \quad \|Z_m - Z_n\|^2 = \|(Z_m - X) - (Z_n - X)\|^2$

$= 2\|Z_m - X\|^2 + 2\|Z_n - X\|^2 - \|Z_m - X + Z_n - X\|^2$

$\|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

$= 2 \underbrace{\|Z_m - X\|^2}_{\leq h + \varepsilon} + 2 \underbrace{\|Z_n - X\|^2}_{\leq h + \varepsilon} - 4 \overbrace{\| \underbrace{\frac{Z_m + Z_n}{2}}_{\in L^2(\mathcal{G})} - X \|^2}^{\geq h}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \quad n \geq n_0 \quad \|Z_n - X\|^2 \leq h + \varepsilon$

$m, n \geq n_0 \quad \|Z_m - Z_n\|^2 \leq 4\varepsilon$

Quindi $(Z_n)_{n \geq 1}$ è di Cauchy rispetto alla norma L^2

$L^2(\mathcal{G})$ è completo, quindi $\exists Z \in L^2(\mathcal{G})$:

$$Z_n \xrightarrow[n \to \infty]{L^2} Z$$

Devo solo verificare che $\langle X - Z, \mathbb{1}_G \rangle = 0 \quad \forall G \in \mathcal{G}$

$$h \leq \|\underbrace{X - Z + \lambda \mathbb{1}_G}_{\in L^2(\mathcal{G})}\|^2 = \underbrace{\|X - Z\|^2}_{\substack{= \\ h \\ \text{facendo il} \\ \text{limite}}} + 2\lambda \langle X - Z, \mathbb{1}_G \rangle + \lambda^2 P(G)^2$$

Se per assurdo $\langle X - Z, \mathbb{1}_G \rangle = \alpha > 0$ per $\lambda < 0$ piccolo avrei un assurdo : $2\lambda\alpha + \lambda^2 P(G)^2 < 0$ $\square$

$\boxed{\text{caso } X \in L^1(\mathcal{F})}$

$X = X^+ - X^-$ per linearità wlog $X \geq 0$

$n \geq 1 \qquad X_n := n \wedge X \in L^2(\mathcal{F}) \qquad \exists Y_n \in L^2(\mathcal{G}) : Y_n = E(X_n | \mathcal{G})$ q.c.

$X_n \nearrow X$ q.c. e in L^1 allora per (cMON)

$\exists Y = \lim_{n \to \infty} Y_n$ q.c. e in L^1 e $Y = E(X | \mathcal{G})$ q.c. $\square$

ALTRE PROPRIETÀ $E(X | \mathcal{G})$

(h) Jensen condizionale

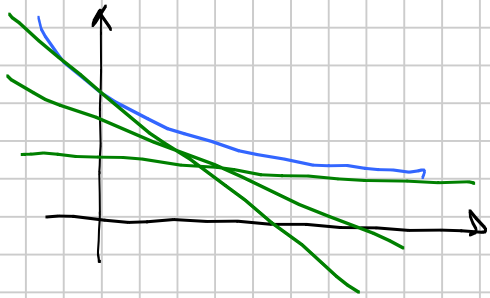
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa

$E(\varphi(X)) \geq \varphi(E(X)) \qquad \forall X \in L^1 \, (\varphi(X) \in L^1)$

$X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \quad \varphi(X) \in L^1 \quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$

Allora $E(\varphi(X) | \mathcal{G}) \geq \varphi(E(X | \mathcal{G}))$ q.c.

Dim



$L := \{(a,b) \in \mathbb{Q}^2 : a + bx \leq \varphi(x)\ \forall x\}$

$$\boxed{\text{Fatto}: \quad \varphi(x) = \sup_{(a,b)\in L} (a+bx) \quad \forall x}$$

$(a,b) \in L \qquad a + bx \leq \varphi(x) \quad \forall x$

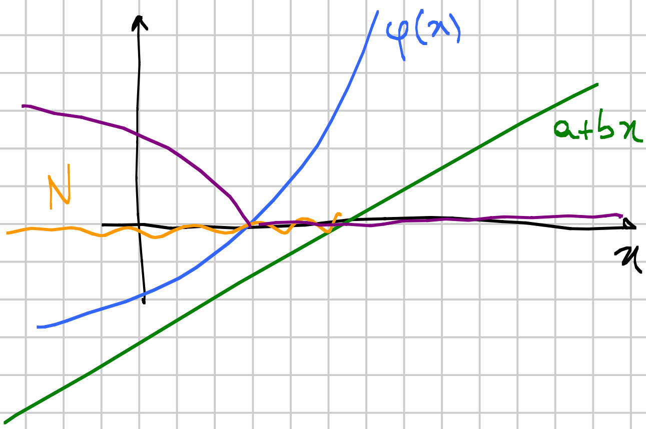
$$a + bE(X|\mathcal{G}) \underset{(c)}{=} E(a+bX|\mathcal{G}) \underset{(c)+(d)}{\leq} E(\varphi(X)|\mathcal{G}) \quad q.c.$$

Sia $Y := E(X|\mathcal{G})$ q.c. sia $Z := E(\varphi(X)|\mathcal{G})$ q.c.

sia $H \in \mathcal{F}$ $P(H) = 1$, $a + bY \leq Z$ su H $\forall (a,b) \in L$ (numerabile!)

$\forall \omega \in H \qquad \varphi(Y(\omega)) = \sup_{(a,b)\in L} a + bY(\omega) \leq Z$ $\square$

★ Togliamo $\varphi(X) \in L^1$ da Jensen classico



$\exists a,b \in \mathbb{R} : a + bx \leq \varphi(x)\ \forall x$

$N := \{x \in \mathbb{R} : a + bx < 0\}$

$\varphi(x)^- := -\varphi(x) \vee 0$

$\varphi(x)^- = 0$ fuori da N

$\varphi(x)^- \leq -(a+bx)$ su N

$$0 \leq E(\varphi(X)^-) = E(\varphi(X)^- ; X \in N) \leq E(-a-bX ; X\in N) < \infty$$

HW.

$E(\varphi(X)) < \infty$ oppure $E(\varphi(X)) = +\infty$

(i) Tower property

$X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \qquad \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$

$$E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H}) \quad q.c.$$

$\star$ $E(E(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{H})$ q.c. (6)

$$E(X|\mathcal{H}|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G}|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H})$$

<u>Dim</u> $Y := E(X|\mathcal{G})$ q.c. $Z := E(X|\mathcal{H})$ q.c.

devo dimostrare che Z è una vers. della sp. c. di Y risp $\mathcal{H}$

1) Z è $\mathcal{H}$-mis ($\in L^1$)

2) $\forall H \in \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$

$$E(Y;H) \underset{\substack{\text{def } Y\\ H\in\mathcal{G}}}{=} E(X;H) \underset{\substack{\text{def } Z\\ H\in\mathcal{H}}}{=} E(Z;H)$$

$\square$

(h+) Corollari importanti di Jensen condizionale

$\star$ $p \geq 1$ $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ $\Rightarrow$ $\|E(X|\mathcal{G})\|_{L^p} \leq \|X\|_{L^p}$

<u>Dim</u> $\varphi(x) = |x|^p$ convessa

$$E(|X|^p) \geq |E(X)|^p$$

$$\|X\|_{L^p} \geq |E(X)|$$

$$E(|X|^p|\mathcal{G}) \geq |E(X|\mathcal{G})|^p \qquad \text{applico } E$$

$$\|X\|_{L^p}^p \geq \|E(X|\mathcal{G})\|_{L^p}^p$$

$\star$ $(X_n)_{n\geq 1}$ $\forall n \geq 1$ $X_n, X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$

Se $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X$ allora $E(X_n|\mathcal{G}) \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} E(X|\mathcal{G})$

• Per fare (j) serve una versione più forte di 2)

$$\boxed{2^+)\ \forall W\ \mathcal{G}\text{-misurabile} : XW \in L^1 \ (\text{oppure } YW \in L^1) \text{ si ha: } \boxed{E(XW) = E(YW)}}$$

★ $1) + 2) \Rightarrow 2^+)$

<u>Dim</u> $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ $Y = E(X|\mathcal{G})$ q.c.

Uso la "standard machine"

a. $W = \mathbb{1}_G$ $G \in \mathcal{G}$ vera per 2)

b. $W = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{G_n}$ $G_n \in \mathcal{G}$ $\alpha_n \in \mathbb{R}$ vera per linearità

c. $W \geq 0$ $\mathcal{G}$-misurabile

$\exists (W_n)_{n\geq 1}$ W_n di tipo b. $W_n \geq 0$ $W_n \nearrow_{n\to\infty} W$ q.c.

$X = X^+ - X^-$ $X^\pm W_n \nearrow X^\pm W$ q.c.

$Y^\pm := E(X^\pm | \mathcal{G}) \geq 0$ q.c. $Y = Y^+ - Y^-$ q.c.

$Y^\pm W_n \nearrow Y^\pm W$ q.c.

$$E(X^\pm W_n) \nearrow E(X^\pm W)$$
$$\text{b.} \longrightarrow \ \|$$
$$E(Y^\pm W_n) \nearrow E(Y^\pm W)$$

per ipotesi una delle coppie è finita

$\Rightarrow E(X^\pm W) = E(Y^\pm W) \Rightarrow E(XW) = E(YW)$

d. W $\mathcal{G}$-misurabile $W = W^+ - W^-$ e chiudo per linearità

(j) Portar fuori ciò che è noto

$X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ Z $\mathcal{G}$-misurabile, $XZ \in L^1(\mathcal{F})$

(oppure $Z E(X|\mathcal{G}) \in L^1$)

$$\boxed{E(XZ|\mathcal{G}) = Z E(X|\mathcal{G}) \text{ q.c.}}$$

Dim: HW grazie a 2^+)

(k) Ruolo dell'indipendenza

$X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad \mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$

$\mathcal{H}$ indipendente da $\sigma(\mathcal{G}, \sigma(X))$

$$E(X \mid \mathcal{G}, \mathcal{H}) \overset{\text{not}}{=} E(X \mid \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})) = E(X \mid \mathcal{G}) \quad \text{q.c.}$$

☆ $\mathcal{G}$ è banale: se $\mathcal{H}$ è indip da X $\Rightarrow$ $\boxed{E(X \mid \mathcal{H}) = E(X) \text{ q.c.}}$

Dim: NO

INTEGRALE STOCASTICO SU $M^2_{a,b}$

$(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ $\quad B$ BM risp alla filtrazione

$$M^2_{a,b} = L^2\big((\Omega\times[a,b];\ \mathcal{F}\otimes\mathcal{B};\ P\otimes Leb);\ \mathbb{R}\big) \cap \{\text{funz. progress. misur.}\}$$

$$= L^2\big((\Omega\times[a,b];\ ?\ ;P\otimes Leb));\mathbb{R}\big)$$

σ-alg complicata che sintetizza la proprietà di progr. misurab.

★ In particolare la norma su $M^2_{a,b}$ è quella ereditata da L^2 e inoltre è completo rispetto ad essa.

L'integrale stocastico è un operatore $I: M^2_{a,b} \to L^2(\Omega;\mathbb{R})$

★ Risulterà un operatore lineare e un'isometria

$$\boxed{\forall X\in M^2_{a,b} \qquad \|I(X)\|_{L^2} = \|X\|_{M^2_{a,b}}}$$

Isometria di Itō

★ Si definisce su dei processi semplici e poi per densità.

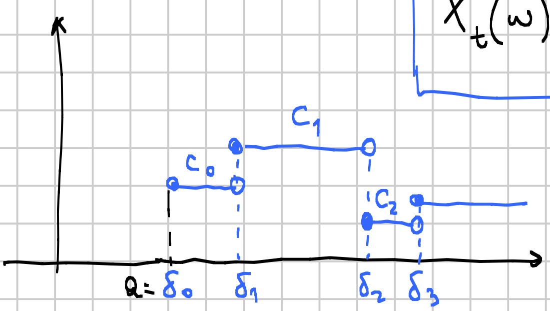
- **Def** Un processo $X\in M^2_{a,b}$ si dice semplice se esistono:

  i. $\delta\in\Delta_{a,b}$ una partizione deterministica $a=\delta_0<\delta_1<\ldots<\delta_{N_\delta}=b$

  ii. $c_0, c_1, \ldots, c_{N_\delta-1}$ $\quad c_i\in L^2(\Omega;\mathcal{F}_{\delta_i})$

  tali che:

$$\boxed{X_t(\omega) = \sum_{i=0}^{N_\delta-1} c_i(\omega)\,\mathbb{1}_{[\delta_i;\delta_{i+1})}(t)}$$



Verifico che $X \in M^2_{a,b}$

→ $\forall t \in [a,b]$ X_t è $\mathcal{F}_t$-misurabile?

$\exists i = 0,1,\dots,N_\delta - 1$: $t \in [\delta_i, \delta_{i+1})$ oppure $t = b$

allora $X_t(\omega) = c_i(\omega)$ ma $\sigma(c_i) \subseteq \mathcal{F}_{\delta_i} \subseteq \mathcal{F}_t$

→ Adattato + cont a dx ⇒ progr. mis.

→ Calcolo la norma $M^2_{a,b}$

$$\|X\|^2_{L^2(\Omega \times [a,b])} := \int_a^b E(X_t^2)\,dt = \int_a^b E\sum_{i=0}^{N-1} c_i^2\, \mathbb{1}_{[\delta_i,\delta_{i+1})}(t)\,dt$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} E(c_i^2)(\delta_{i+1} - \delta_i) < \infty$$

★ Denotiamo con $S^2_{a,b} = \{ X \in M^2_{a,b} : X \text{ è semplice} \}$

• Definisco I su $S^2_{a,b}$

$$X_t = \sum_{i=1}^{N} c_i\, \mathbb{1}_{[\delta_i,\delta_{i+1})}(t)$$

$$\boxed{I(X) := \sum_{i=1}^{N} c_i (B_{\delta_{i+1}} - B_{\delta_i})}$$

★ Infatti moralmente:

$$\int_a^b c_i\, \mathbb{1}_{[\delta_i;\delta_{i+1})}(t)\,dB_t = c_i \int_{\delta_i}^{\delta_{i+1}} dB_t = c_i(B_{\delta_{i+1}} - B_{\delta_i})$$

→ Buona definizione: se ci sono due scelte di δ e c_i che definiscono X come processo semplice, il valore calcolato per $I(X)$ deve essere il medesimo (check)

→ Verificare linearità su $S^2_{a,b}$ (check)

→ Isometria di Itô su $S^2_{a,b}$

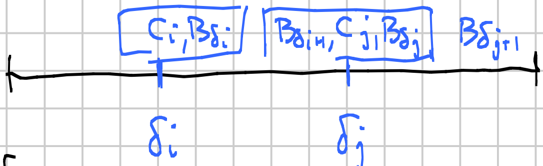
$X \in S^2_{a,b}$ $\qquad X_t = \sum_{i=0}^{N\delta-1} c_i \mathbb{1}_{[\delta_i ; \delta_{i+1})}(t)$

$$\|X\|^2_{M^2_{a,b}} = \sum_{i=0}^{N-1} E(c_i^2)(\delta_{i+1}-\delta_i) \qquad \text{già calcolata}$$

$$\|I(X)\|^2_{L^2(\Omega)} := E\left(I(X)^2\right) = E\left[\sum_{i=0}^{N-1} c_i (B_{\delta_{i+1}} - B_{\delta_i}) \sum_{j=0}^{N-1} c_j (B_{\delta_{j+1}} - B_{\delta_j})\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} E\left[c_i^2 (B_{\delta_{i+1}} - B_{\delta_i})^2\right] + \underbrace{2\sum_{i<j} E\left[c_i c_j (B_{\delta_{i+1}} - B_{\delta_i})(B_{\delta_{j+1}} - B_{\delta_j})\right]}_{=0}$$

studio l'ultima sommatoria:



$$\overset{(a)}{=} E\left[E\left(c_i c_j (B_{\delta_{i+1}} - B_{\delta_i})(B_{\delta_{j+1}} - B_{\delta_j}) \mid \mathcal{F}_{\delta_j}\right)\right]$$

$$\overset{(j)}{=} E\left[c_i c_j (B_{\delta_{i+1}} - B_{\delta_i}) E\left(B_{\delta_{j+1}} - B_{\delta_j} \mid \mathcal{F}_{\delta_j}\right)\right] \quad (*)$$

indip perché BM w/r to $(\mathcal{F}_t)_t$

ord 24

$$\overset{(k)}{=} E\left[c_i c_j (B_{\delta_{i+1}} - B_{\delta_i}) \overbrace{E\big(\underbrace{B_{\delta_{j+1}} - B_{\delta_j}}_{\sim \mathcal{N}(0 ; \delta_{j+1} - \delta_j)}\big)}^{0}\right] = 0$$

(*) a posteriori l'argomento di $E[\dots]$ è zero, quindi L^1

Torniamo all'inizio

$$\|I(X)\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=0}^{N-1} E\left[c_i^2 (B_{\delta_{i+1}} - B_{\delta_i})^2\right]$$

$$\overset{(a)}{=} \sum_{i=0}^{N-1} E\left[E\left(c_i^2 (B_{\delta_{i+1}} - B_{\delta_i})^2 \mid \mathcal{F}_{\delta_i}\right)\right]$$

$$\overset{(k)}{=} \sum_i E\left[c_i^2\right] E\left[\big(\underbrace{B_{\delta_{i+1}} - B_{\delta_i}}_{\sim \mathcal{N}(0, \delta_{i+1} - \delta_i)}\big)^2\right] = \sum_i E(c_i^2)(\delta_{i+1} - \delta_i)$$

- Distribuzione di $I(X)$ in $S^2_{a,b}$

<u>Prop</u> $X \in S^2_{a,b}$

i. $E(I(X)) = 0$

ii. $Var(I(X)) = \|X\|^2_{M^2}$

iii. $E(I(X) \mid \mathcal{F}_a) = 0$ q.c.

iv. $E(I(X)^2 \mid \mathcal{F}_a) = \int_a^b E(X_s^2 \mid \mathcal{F}_a)\, ds$ q.c.

<u>Dim</u> iii. $\Rightarrow$ i. , iv. $\Rightarrow$ ii. per (a)

$\boxed{\text{iii.}}$ $X = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \mathbb{1}_{[\delta_i;\delta_{i+1})}$ $\qquad I(X) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i (B_{\delta_{i+1}} - B_{\delta_i})$

$$E(I(X) \mid \mathcal{F}_a) = \sum_i E(c_i (B_{\delta_{i+1}} - B_{\delta_i}) \mid \mathcal{F}_a)$$

$$\overset{(i)}{=} \sum E\left[E(c_i (B_{\delta_{i+1}} - B_{\delta_i}) \mid \mathcal{F}_{\delta_i}) \mid \mathcal{F}_a\right]$$

indip

$$= \sum_i E\left[c_i \underbrace{E(B_{\delta_{i+1}} - B_{\delta_i})}_{0} \mid \mathcal{F}_a\right] = 0 \quad \text{q.c.}$$

$\boxed{\text{iv.}}$ $$\int_a^b E(X_s^2 \mid \mathcal{F}_a)\, ds = \int_a^b E\left(\sum_i c_i^2 \mathbb{1}_{[\delta_i,\delta_{i+1})}(s) \mid \mathcal{F}_a\right) ds$$

$$= \int_a^b \sum_i \mathbb{1}_{[\delta_i,\delta_{i+1})}(s)\, ds\, E(c_i^2 \mid \mathcal{F}_a)$$

$$= \sum_i (\delta_{i+1} - \delta_i) E(c_i^2 \mid \mathcal{F}_a)$$

$$E(I(X)^2 \mid \mathcal{F}_a) = E\left[\sum_{i,j} c_i c_j (B_{\delta_{i+1}} - B_{\delta_i})(B_{\delta_{j+1}} - B_{\delta_j}) \mid \mathcal{F}_a\right]$$

$$= \sum_i E(c_i^2 (B_{\delta_{i+1}} - B_{\delta_i})^2 \mid \mathcal{F}_a) + 0$$

(check)

$$= \sum_i E(c_i^2 \mid \mathcal{F}_a)(\delta_{i+1} - \delta_i)$$

$\square$

- Definisco I su $M^2_{a,b}$

$\to$ diamo per buono che $S^2_{a,b}$ è denso in $M^2_{a,b}$

$X \in M^2_{a,b}$ sia $(X^{(n)})_{n \geq 1}$ $X^{(n)} \in S^2_{a,b}$ $\forall n \geq 1$ e

$$X^{(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} X \quad \text{nella norma } M^2_{a,b}$$

$\forall n$ è definito $I(X^{(n)})$. Posso dire che convergono?
Sì, perché $X^{(n)}$ è di Cauchy, quindi (isometria di Itô su $S^2_{a,b}$)
$\Rightarrow$ $I(X^{(n)})$ è di Cauchy $\Rightarrow$ converge perché $M^2_{a,b}$ è completo

⚠ C'è da verificare la buona definizione (HW)

* Settimana prossima niente lezione

- Distribuzione di $I(X)$ in $M^2_{a,b}$

Prop $X \in M^2_{a,b}$

i. $E(I(X)) = 0$

ii. $Var(I(X)) = \|X\|^2_{M^2}$ ← isometria di Itō

iii. $E(I(X) | \mathcal{F}_a) = 0$ q.c.

iv. $E(I(X)^2 | \mathcal{F}_a) = \int_a^b E(X_s^2 | \mathcal{F}_a) ds$ q.c.

Dim iii. ⇒ i. e iv. ⇒ ii.

$\boxed{iii.}$ $X \in M^2_{a,b}$ $I(X) = L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} I(X^{(n)})$

dove $(X^{(n)})_{n\geq 1}$ $X^{(n)} \in S^2_{a,b}$, $X^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{M^2} X$

Siccome $I(X^{(n)}) \xrightarrow{L^2} I(X)$ vale anche per $E(\cdot | \mathcal{F})$

$\forall n \geq 1$ $0 = E(I(X^{(n)}) | \mathcal{F}_a) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} E(I(X) | \mathcal{F}_a)$ □

$\boxed{iv.}$ $X \in M^2_{a,b}$ $I(X) = L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} I(X^{(n)})$

dove $(X^{(n)})_{n\geq 1}$ $X^{(n)} \in S^2_{a,b}$, $X^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{M^2} X$

$\forall n \geq 1$ $E(I(X^{(n)})^2 | \mathcal{F}_a) = \int_a^b E((X_s^{(n)})^2 | \mathcal{F}_a) ds$

Se $Y_n \xrightarrow{L^2} Y$ allora $Y_n^2 \xrightarrow{L^1} Y^2$

$E(|Y_n^2 - Y^2|) = E(|Y_n - Y||Y_n + Y|) \leq \sqrt{E[(Y_n - Y)^2]}\sqrt{E[(Y_n + Y)^2]}$

$= \|Y_n - Y\|_{L^2} \cdot \sqrt{2}(\|Y_n\|_{L^2} + \|Y\|_{L^2}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Siccome $I(X^{(n)})^2 \xrightarrow{L^1} I(X)^2$

$$E(I(X^{(n)})^2 | \mathcal{F}_a) \xrightarrow{L^1} E(I(X) | \mathcal{F}_a)$$

$$\int_a^b E((X_s^{(n)})^2 | \mathcal{F}_a)\, ds = E\left[\int_a^b (X_s^{(n)})^2 ds \,\Big|\, \mathcal{F}_a \right]$$

$$E\left| \int_a^b (X_s^{(n)})^2 ds - \int_a^b X_s^2 ds \right| \le E \int_a^b |(X_s^{(n)})^2 - X_s^2|\, ds = \| (X^{(n)})^2 - X^2 \|_{L^1(\Omega \times [a,b])}$$

$$X^{(n)} \xrightarrow{L^2(\Omega\times[a,b])} X \quad \Rightarrow \quad (X^{(n)})^2 \xrightarrow{L^1(\Omega\times[a,b])} X^2$$

quindi $\int_a^b (X_s^{(n)})^2 ds \xrightarrow{L^1} \int_a^b X_s^2 ds$ e quindi lo stesso per $E(\cdot | \mathcal{F}_a)$

$$\int_a^b E((X_s^{(n)})^2 | \mathcal{F}_a)\, ds \to E\left[\int_a^b X_s^2 ds \,\Big|\, \mathcal{F}_a \right] = \int_a^b E(X_s^2 | \mathcal{F}_a)\, ds \quad \square$$

- Ho usato che $\int_a^b E(V_s | \mathcal{G})\, ds = E\left[\int_a^b V_s\, ds \,\Big|\, \mathcal{G} \right]$ q.c.

$Hp: (\Omega, \mathcal{F}, P) \quad V = (V_s)_{s\in[a,b]} \quad V \in L^1(\Omega \times [a,b]) \quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$

Dim Applico la def di speranza condizionale

1) $\int_a^b E(V_s | \mathcal{G})\, ds$ è $\mathcal{G}$-misurabile $\to$ ovvio

2) $\forall G \in \mathcal{G}$

$$E\left[\int_a^b E(V_s|\mathcal{G})\, ds \,;\, G \right] = E\left[\int_a^b E(V_s|\mathcal{G}) \mathbb{1}_G\, ds \right]$$

$$= \int_a^b E\left[E(V_s|\mathcal{G}) ; G \right] ds = \int_a^b E\left[V_s ; G \right] ds$$

$$= E\left[\int_a^b V_s\, ds \,;\, G \right]$$

★ Corollario: Isometria di Itō per $X \in M^2_{a,b}$

$$\boxed{\|I(X)\|_{L^2(\Omega)} = \|X\|_{L^2(\Omega\times[a,b])}}$$

↳ è la ii.

★ $X, Y \in M^2_{a,b}$ allora

$$\boxed{\langle I(X), I(Y)\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle X, Y\rangle_{M^2}}$$

Dim $\|I(X)+I(Y)\|^2_{L^2} = \langle I(X)+I(Y); I(X)+I(Y)\rangle$

$= \|I(X)\|^2_{L^2} + 2\langle I(X), I(Y)\rangle_{L^2} + \|I(Y)\|^2_{L^2}$

$\|X+Y\|^2_{M^2} = \|X\|^2_{M^2} + 2\langle X, Y\rangle_{M^2} + \|Y\|^2_{M^2}$ $\square$

★ I è (paradossalmente) iniettiva

$$I(X) = \int_a^b X_s \, dB_s$$

$X, Y \in M^2_{a,b}$ $\quad I(X) = I(Y)$ q.c. allora

$$0 = \|I(X) - I(Y)\|_{L^2} = \|I(X-Y)\|_{L^2} = \|X-Y\|_{M^2}$$

$\Rightarrow X = Y$ $P\otimes Leb$ - q.o. (ω, t) $\square$

---

ora 26

• Linearità di I su $M^2_{a,b}$

$X, Y \in M^2_{a,b}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora $I(\alpha X + \beta Y) = \alpha I(X) + \beta I(Y)$ q.c.

Dim $X^{(n)} \xrightarrow{M^2} X$ $\quad Y^{(n)} \xrightarrow{M^2} Y$ $\quad X^{(n)}, Y^{(n)} \in S^2_{a,b}$

$\alpha X^{(n)} + \beta Y^{(n)} \xrightarrow{M^2} \alpha X + \beta Y$

$$I(\alpha X+\beta Y) = L^2\text{-}\lim_n I(\alpha X^{(n)}+\beta Y^{(n)}) =$$

$$= L^2\text{-}\lim_n \left(\alpha I(X^{(n)}) + \beta I(Y^{(n)})\right) = \alpha I(X) + \beta I(Y) \qquad \square$$

■ $S^2_{a,b}$ È DENSO IN $M^2_{a,b}$

Premessa: $\quad X \in M^2_{a,b} = L^2(\Omega \times [a,b], \underset{\text{progr. misurab.}}{\mathcal{H}}, P \otimes Leb)$

$Y \in S^2_{a,b} \iff \exists\, \delta \in \Delta_{a,b} \quad \delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)$

$\exists\, c_0, c_1, \dots, c_{N-1} \quad c_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{\delta_i}, P)$

t.c. $\quad Y_t = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \mathbb{1}_{[\delta_i, \delta_{i+1})}(t)$

Costruisco gli approssimanti di X:

$\forall \delta \in \Delta_{a,b} \quad \forall f \in L^2(a,b)$

$$c_i^f := \begin{cases} \dfrac{1}{\delta_i - \delta_{i-1}} \displaystyle\int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} f(t)\,dt & i = 1,2,\dots,N_\delta - 1 \\ 0 & i = 0 \end{cases}$$

$\pi_\delta f := \sum_{i=0}^{N-1} c_i^f \mathbb{1}_{[\delta_i, \delta_{i+1})}(t)$ approssimazione di una traiettoria

$\pi_\delta : L^2(a,b) \longrightarrow L^2(a,b)$ costanti a tratti

★ $\pi_\delta X \in S^2_{a,b}$

$$\pi_\delta X(\omega) := \begin{cases} \pi_\delta(X_\cdot(\omega)) & \omega : X_\cdot(\omega) \in L^2(a,b) \\ 0 & \text{altri } \omega \end{cases}$$

$$\pi_\delta X_t := \sum_{i=0}^{N-1} c_i^X \mathbb{1}_{[\delta_i, \delta_{i+1})}(t) \quad \text{q.c.}$$

devo verificare che $c_i^X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{\delta_i}, P)$

$c_i^X = \dfrac{1}{\delta_i - \delta_{i-1}} \displaystyle\int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} X_t\,dt$ è $\mathcal{F}_{\delta_i}$-misurabile

$$\|C_i^X\|^2_{L^2} = E\left\{\left[\int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \frac{1}{\delta_i-\delta_{i-1}} X_t\, dt\right]^2\right\} \leq E\left[\int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \frac{1}{\delta_i-\delta_{i-1}} X_t^2\, dt\right] < \infty$$

$\star$ Prendo $(\delta^{(n)})_{n\geq 1}$ $\quad \delta^{(n)} \in \Delta_{a,b}$

claim: va presa in modo che $\pi_{\delta^{(n)}} f \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(a,b)} f \quad \forall f \in L^2(a,b)$

$X^{(n)} := \pi_{\delta^{(n)}} X \qquad X^{(n)} \in S^2_{a,b} \qquad \forall n \geq 1$

per q.o. ω $\quad X^{(n)}_\cdot(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(a,b)} X_\cdot(\omega)$

$$\|X^{(n)}(\omega) - X(\omega)\|^2_* := \int_a^b \left(X_t^{(n)}(\omega) - X_t(\omega)\right)^2 dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{q.o. } \omega$$

Vorrei $\|X^{(n)} - X\|^2_{M^2} := E\|X^{(n)}(\omega) - X(\omega)\|^2_* \xrightarrow[n\to\infty]{?} 0$

Occorre la convergenza in L^1, ad esempio in virtù di (DOM)

$$Y_n(\omega) := \begin{cases} \|X^{(n)}(\omega) - X(\omega)\|^2_* & \omega : X^{(n)}, X \in L^2(a,b) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$Y_n \xrightarrow{q.c.} 0$

$$|Y_n| \leq 2\|X^{(n)}(\omega)\|^2_* + 2\|X(\omega)\|^2_* \leq 4\|X(\omega)\|^2_* \in L^1(\Omega)$$

claim $\rightarrow$ $\wedge$

$\|X(\omega)\|^2_*$

$X \in M^2_{a,b}$

$\|X\|^2_{M^2_{a,b}} := E\|X(\omega)\|^2_* < \infty$

ANALISI STOCASTICA — ora 27

Note Title 02/05/2016

- Stiamo dimostrando che $S^2_{a,b}$ è denso in $M^2_{a,b}$. Resta il claim:

$0 \leq a < b$ fissati si può prendere $(\delta^{(n)})_{n\geq 1}$ $\delta^{(n)} \in \Delta_{a,b}$:

$$\forall f \in L^2(a,b), \quad \pi_{\delta^{(n)}} f \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(a,b)} f$$

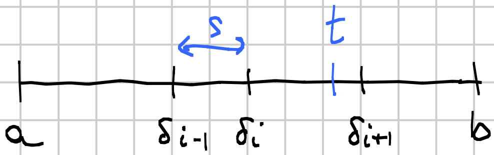
__Dim__ __Step 1__: suppongo f continua. $\forall t \in [a,b]$

$$|(\pi_\delta f)(t) - f(t)| = \left| \sum_i c_i^f \mathbb{1}_{[\delta_i, \delta_{i+1})}(t) - f(t) \right|$$

$\exists i : t \in [\delta_i, \delta_{i+1})$

$$= |c_i^f - f(t)| = \left| \frac{1}{\delta_i - \delta_{i-1}} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} f(s)\,ds - f(t) \right|$$

$$\leq \frac{1}{\delta_i - \delta_{i-1}} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} |f(s) - f(t)|\,ds$$



Siccome f è unif. continua

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 : |s-t| \leq \eta \Rightarrow |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$$

Se $|\delta| \leq \frac{\eta}{2} \Rightarrow |s-t| \leq \eta \quad \forall s \in [\delta_{i-1}, \delta_i] \Rightarrow$

$$|(\pi_\delta f)(t) - f(t)| \leq \varepsilon \qquad \forall t \in [a,b]$$

Quindi $\pi_{\delta^{(n)}} f \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ puntualmente se $|\delta^{(n)}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Per dedurre $\pi_{\delta^{(n)}} f \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(a,b)} f$ basta osservare che

$$|(\pi_{\delta^{(n)}} f)(t)| \leq \max_i |c_i^f| \leq \max_{u \in (a,b)} |f(u)|$$ e applicare (DOM)

__Step 2__: $f \in L^2(a,b)$ qualsiasi. $\mathcal{C}(a,b)$ sono dense in $L^2(a,b)$

$\varepsilon > 0$ Sia $g \in \mathcal{C}(a,b) : \| f - g \|_* \leq \varepsilon$

$$\|\pi_\delta f - f\|_* \le \|\pi_\delta f - \pi_\delta g\|_* + \|\pi_\delta g - g\|_* + \|g - f\|_*$$

π_δ è lineare $\quad \|\pi_\delta f - \pi_\delta g\|_* \le \|\pi_\delta\| \, \|f-g\|_*$

$$\|\pi_\delta \varphi\|_*^2 := \int_a^b [(\pi_\delta \varphi)(t)]^2 dt = \int_a^b \Big[\sum_i c_i^\varphi \mathbb{1}_{[\delta_i, \delta_{i+1})}(t)\Big]^2 dt$$

$$= \int_a^b \sum_i (c_i^\varphi)^2 \mathbb{1}_{[\delta_i, \delta_{i+1})}(t)\, dt = \sum_{i=0}^{N-1} (c_i^\varphi)^2 (\delta_{i+1} - \delta_i)$$

$$(c_i^\varphi)^2 = \left[\frac{1}{\delta_i - \delta_{i-1}} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \varphi(u)\, du\right]^2 \le \frac{1}{\delta_i - \delta_{i-1}} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \varphi^2(u)\, du$$

$$\|\pi_\delta \varphi\|_*^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{\delta_i - \delta_{i-1}} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \varphi^2(u)\, du \le \underbrace{\max_i \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{\delta_i - \delta_{i-1}}}_{\ge \|\pi_\delta\|} \underbrace{\int_a^b \varphi(u)^2 du}_{\|\varphi\|_*^2}$$

Concludo: prendo $(\delta^{(n)})_{n\ge 1}$ t.c. $|\delta^{(n)}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e $\|\pi_{\delta^{(n)}}\| = 1$

Allora $\pi_{\delta^{(n)}} f \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(a,b)} f$ $\square$

ora 28

INTEGRALE STOCASTICO COME PROCESSO

$\forall\ 0 \le a < b \quad I_{a,b} : M^2_{a,b} \to L^2(\Omega)$

$T > 0$ fissato $\quad X \in M^2_{0,T} \Rightarrow X \in M^2_{a,b} \ \forall\ 0 \le a < b \le T$

$\int_a^b X_t \, dB_t$ è definito

inoltre se $0 \le a < b < c \le T$

$$\int_a^c X_t \, dB_t = \int_a^b X_t \, dB_t + \int_b^c X_t \, dB_t \quad \text{q.c.}$$ (check)

Posso considerare il processo stocastico $\left(\int_0^t X_s \, dB_s\right)_{t\in[0,T]}$

$$I_t(X) := I_{0,t}(X) =: \int_0^t X_s \, dB_s$$

Definito per ogni t per q.o. ω. Quindi qualunque modificazione di esso sarà q.c. uguale a t fissato

Y_t modif. di $I_t(X)$ $\quad \forall t \in [0,T] \quad Y_t = \int_0^t X_s \, dB_s$ q.c.

Dimostreremo che esiste un'unica modificazione continua e quella sarà la definizione conclusiva.

MARTINGALE

Sono processi stocastici con evoluzione quasi costante(?)
Teoria a tempi discreti più semplice e comunque potente.
Teoria a tempi continui in molti casi va fatta a parte.

- **Def** $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ $\quad X = (X_n)_{n \geq 0}$ processo è una martingala rispetto alla filtrazione se

  i. è adattato : X_n è $\mathcal{F}_n$-mis $\forall n \geq 0$

  ii. è L^1 : $X_n \in L^1(\Omega)$ $\forall n \geq 0$

  iii. $\boxed{E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n \text{ q.c.}}$ $\quad n \geq 0$

  $\iff E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) = 0$ q.c.

  $\iff E(X_m - X_n | \mathcal{F}_n) = 0$ q.c. $\forall m \geq n$

- **Def** $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ $\quad X = (X_t)_{t \geq 0}$ processo è una martingala rispetto alla filtrazione se

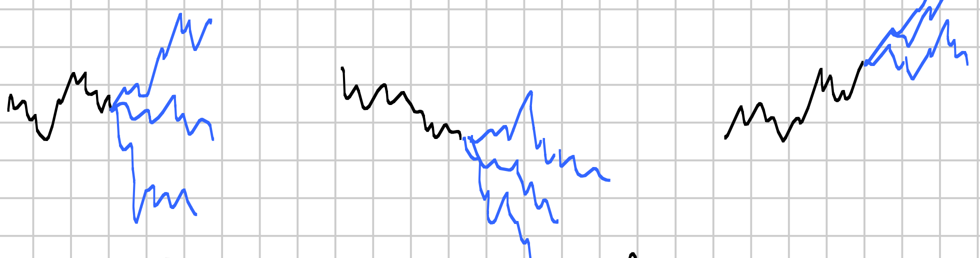
  i. è adattato

  ii. è L^1

  iii. $\boxed{E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s \text{ q.c.}}$ $\quad \forall s \leq t$

$\iff E(X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s) = 0$ q.c.

- Def X è una supermartingala (risp sottomartingala) se nella def sopra invece di $=$ c'è $\leq$ (risp. $\geq$)



martingala supermartingala sottomartingala

★ Se non è specificata la filtrazione, si intende quella naturale

★ Se $X_0 \equiv 0$ si dice che X è una martingala uscente da zero

↳ Se X è mg allora $X_t - X_0 =: Y_t$ è mg uscente da zero

ESEMPI DI MARTINGALE

- Passeggiata aleatoria

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $(X_n)_{n\geq 1}$ $X_n \in L^1(\Omega)$ $E(X_n) = 0$ $\forall n$ indipendenti

↳ ad esempio $X_n = \pm 1$ con prob $\frac{1}{2}$

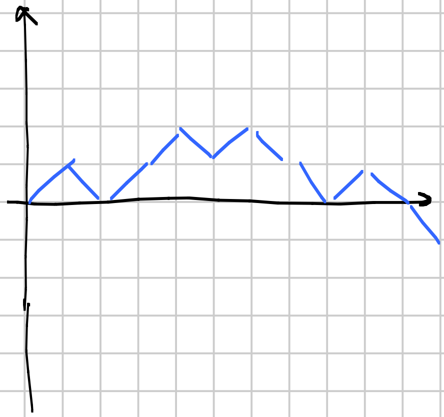
$S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ è un processo stocastico che è sempre mg usc da 0

i. gratis ii. per linearità

iii. $$E(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \overset{!}{=} E(S_n + X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \underbrace{E(S_n \mid \mathcal{F}_n)}^{S_n \text{ q.c.}} + \underbrace{E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)}^{E(X_{n+1}) = 0 \text{ q.c.}}$$

$\overset{!}{=} S_n$ q.c.

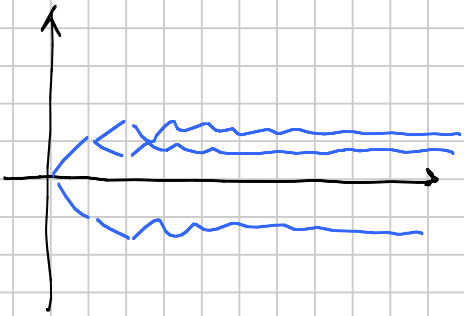
★ Se le X_n sono iid si parla di passeggiata aleatoria, se no no



passeggiata aleatoria di media nulla →
→ mg che oscilla e diverge

★ $X_n = \pm\frac{1}{n}$ con prob $\frac{1}{2}$

$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.,\ L^2} Y$



mg che converge q.c. e in L^p

● Lascia o raddoppia

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $(X_n)_{n\geq 1}$ $X_n \geq 0$ q.c. $X_n \in L^1$ $E(X_n) = 1$ $\forall n$ indip.

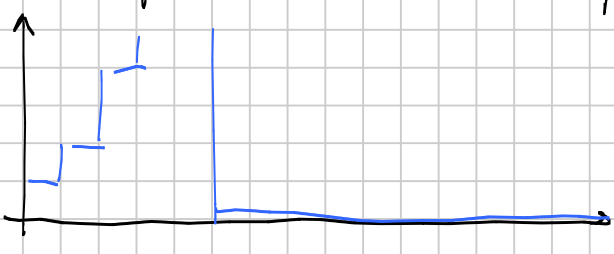
$M_n := \prod_{i=1}^{n} X_i$ $M_0 \equiv 1$ è sempre mg non negativa

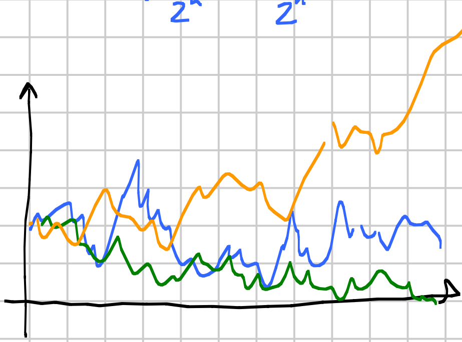
$E(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(M_n X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n E(X_{n+1}) = M_n$ q.c.

★ $X_n = 0, 2$ con prob $\frac{1}{2}$

$M_0 = 1$ $M_1 = \underset{\frac{1}{2}}{0}$ o $\underset{\frac{1}{2}}{2}$ $M_2 = \underset{\frac{3}{4}}{0}$ o $\underset{\frac{1}{4}}{4}$ $M_n = \underset{1-\frac{1}{2^n}}{0}$ o $\underset{\frac{1}{2^n}}{2^n}$

↳ montepremi "Lascia o Raddoppia"





- **MOTO BROWNIANO**

$(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{F}, P)$ $\quad B$ BM risp. $\mathcal{F}_t$ è mg uscente da zero rispetto a $\mathcal{F}_t$

i. adattato

ii. L^1 $\quad (B_t \sim \mathcal{N}(0,t))$

iii. $E(B_t | \mathcal{F}_s) = E(\underbrace{B_t - B_s | \mathcal{F}_s}_{=0}) + E(\underbrace{B_s | \mathcal{F}_s}_{=B_s}) = B_s$ q.c.

- **INTEGRALE STOCASTICO**

(HW)

ESEMPI DI MARTINGALE

- Integrale stocastico

$(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ $B = (B_t)_{t\geq 0}$ BM rispetto alla filtrazione

$T > 0$ $X \in M^2_{0,T}$ $I_t(X) := I_{0,t}(X) = \int_0^t X_s \, dB_s$

$I(X)$ è una mg.

i. è adattato?

$t \in [0,T]$ $I_t(X)$ è $\mathcal{F}_t$-misurabile?

$$I_t(X) = I_{0,t}(X) := L^2\text{-}\lim_{|\delta|\to 0} \underbrace{I_{0,t}(\pi_\delta(X))}_{:= \sum_i c_i (B_{\delta_{i+1}} - B_{\delta_i})} \qquad \text{ok.}$$

$\mathcal{F}_t$-mis.

ii. è L^1?

$t \in [0,T]$ $I_t(X) = I_{0,t}(X)$ è $L^2(\Omega)$

$I_{0,t} : M^2_{0,t} \longrightarrow L^2(\Omega)$

iii. $0 \leq s \leq t \leq T$

$$E(I_t(X) \mid \mathcal{F}_s) = E(I_{0,s}(X) + I_{s,t}(X) \mid \mathcal{F}_s)$$

è $\mathcal{F}_s$-mis

$$= I_s(X) + \underbrace{E(I_{s,t}(X) \mid \mathcal{F}_s)}_{=0 \text{ (ora 25) q.c.}} = I_s(X) \quad \text{q.c.} \qquad \boxed{\text{ok}}$$

- Aumento della conoscenza

(sia discreto sia continuo)

$(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ $\quad X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ $\quad \mathcal{F}_\infty \leftarrow \bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$

$X_t := E(X|\mathcal{F}_t)$ $\quad t \geq 0$

(definizione q.c.)

Allora $(X_t)_{t\geq 0}$ è una mg. inoltre converge a X q.c. e in L^1 (check io)

i. ii. ovvie iii. "tower property" $E(X|\mathcal{F}_t|\mathcal{F}_s) = E(X|\mathcal{F}_s)$

- Prop. Se X è mg e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è convessa allora $\varphi(X)$ è una sottomg. (Ammesso che $\varphi(X_t) \in L^1 \ \forall t \geq 0$)

Dim $\quad Y_t := \varphi(X_t)$

i. φ è continua $\Rightarrow$ misurabile : $\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ $\Rightarrow$ Y_t $\mathcal{F}_t$-mis

ii. ipotesi

iii. $0 \leq s \leq t$

$$E(Y_t|\mathcal{F}_s) := E(\varphi(X_t)|\mathcal{F}_s) \overset{\text{(c Jensen)}}{\geq} \varphi(E(X_t|\mathcal{F}_s)) \overset{X \text{ mg}}{=} \varphi(X_s) =: Y_s$$

$\rightarrow$ $\boxed{X \text{ mg} \Rightarrow X^2 \text{ è sottomg}}$

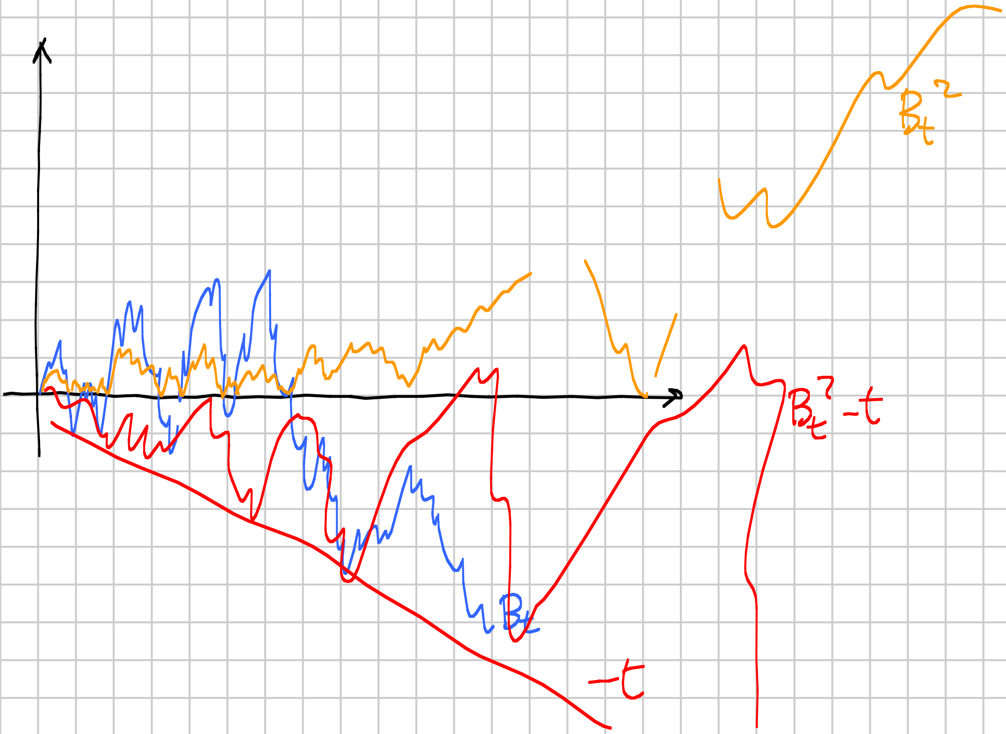
- Correggere sottomg (o sopramg)

Esempio : B_t BM è mg $\quad B_t^2$ è sottomg

$0 \leq s \leq t$ $\quad E(B_t^2|\mathcal{F}_s) = E((B_t - B_s + B_s)^2|\mathcal{F}_s)$

$$= B_s^2 + \underbrace{2B_s E(\underbrace{B_t - B_s}_{\text{indip da } \mathcal{F}_s} \cancel{|\mathcal{F}_s})}_{0} + \underbrace{E((\underbrace{B_t - B_s}_{\text{indip da } \mathcal{F}_s})^2 \cancel{|\mathcal{F}_s})}_{B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)} = B_s^2 + t - s$$

★ $\boxed{B_t^2 - t \text{ è una mg}}$



HW: Rifare per SSRW

ord 30

★ Esempio : $I_t(X) =: I_t$

$0 \le s \le t \qquad E(I_t^2 \mid \mathcal{F}_s) = E((I_s + I_{s,t})^2 \mid \mathcal{F}_s)$

$$= I_s^2 + 2 I_s \underbrace{E(I_{s,t} \mid \mathcal{F}_s)}_{=0 \text{ (ord 25)}} + E(I_{s,t}^2 \mid \mathcal{F}_s) = I_s^2 + E\left(\int_s^t X_u^2\,du \,\Big|\, \mathcal{F}_s\right)$$

$$\boxed{M_t := I_t^2 - \int_0^t X_u^2\,du \quad \text{è una mg}}$$

$$E(M_t \mid \mathcal{F}_s) = E\left(I_t^2 - \int_0^t X_u^2\,du \,\Big|\, \mathcal{F}_s\right) = I_s^2 - E\Big(\underbrace{\int_0^s X_u^2\,du}_{\mathcal{F}_s\text{-mis}} \,\Big|\, \mathcal{F}_s\Big) = M_s \quad \text{q.c.}$$

★ Vedremo che da questo segue che $\boxed{\langle I(X)\rangle_t = \int_0^t X_u^2\,du \quad \text{q.c.}}$

INTEGRALE STOCASTICO DISCRETO

$$\int_0^t X_s \, dB_s \approx \sum_i X_{\delta_i}(B_{\delta_{i+1}} - B_{\delta_i})$$

- **Def** Su $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ siano M e X processi adattati
Si definisce il processo $Y = X \bullet M$:

$$\begin{cases} Y_n := \sum_{i=1}^{n} X_{i-1}(M_i - M_{i-1}) & n \geq 1 \\ Y_0 := 0 \end{cases}$$

★ Y è automaticamente adattato

- **Prop** Se M è mg $\Rightarrow X \bullet M$ è mg
Se M è sottomg (sopra mg) e X è limitato $\Rightarrow X \bullet M$ è sottomg (sopra mg)

Dim a) M mg

i. Y adattato

ii. $i \geq 1$ considero $X_{i-1}(M_i - M_{i-1})$

$$0 = E(M_i - M_{i-1} \mid \mathcal{F}_{i-1}) \quad q.c.$$

$$L^1 \ni 0 = \underbrace{X_{i-1}}_{\mathcal{F}_{i-1}\text{-mis}} E(M_i - M_{i-1} \mid \mathcal{F}_{i-1}) \underset{L^1}{=} E(X_{i-1}(M_i - M_{i-1}) \mid \mathcal{F}_{i-1})$$

$\Rightarrow E(X_{i-1}(M_i - M_{i-1})) = 0 \quad \Rightarrow Y_n \in L^1$ e $E(Y_n) = 0$ $\forall n \geq 0$

iii. $E(Y_{n+1} - Y_n \mid \mathcal{F}_n) = E(X_n(M_{n+1} - M_n) \mid \mathcal{F}_n) = 0$ q.c.

b) Tutto analogo tranne ii. $X \in L^\infty, M \in L^1 \Rightarrow XM \in L^1$ ...

X limitato $\Rightarrow \exists L > 0 : |X_n| \leq L \ \forall n \geq 0$

$$\Rightarrow |X_{i-1}(M_i - M_{i-1})| \leq L|M_i - M_{i-1}| \in L^1$$

★ Questa proposizione dice che se scommetto su qualcosa (borsa o azzardo è uguale) se il sottostante è una mg (sopra mg) allora indipendentemente dalla strategia X i miei guadagni sono una mg (sopra mg)

TEMPI D'ARRESTO

Variabile aleatoria non negativa che rappresenta il tempo casuale di un evento "compatibile" con la filtrazione dello spazio

- Def Su $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ la v.a. τ a valori in $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ è un tempo d'arresto se

$$\forall n \geq 0 \quad \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$$

$$\Leftrightarrow \quad \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

$$\Leftrightarrow \quad (\mathbb{1}_{\tau > n})_{n\geq 0} \text{ è adattato}$$

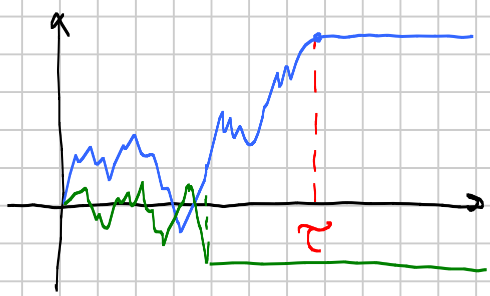
- Def Su $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ la v.a. τ a valori in $[0, +\infty]$ è un tempo d'arresto se

$$\forall t \geq 0 \quad \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

$$\Leftrightarrow \quad (\mathbb{1}_{\tau > t})_{t\geq 0} \text{ è adattato}$$

(HW: check $\Leftrightarrow$)

- Processi arrestati



Def X un processo adattato, τ t.d.a.

X^τ il processo arrestato è defin.:

$$\boxed{X_t^\tau := X_{t\wedge\tau}}$$

★ A tempi discreti: $X^\tau = C^\tau \bullet X + X_0$

$$X_n^\tau - X_0 := X_{n\wedge\tau} - X_0 = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\tau > i-1} \cdot (X_i - X_{i-1}) = (C^\tau \bullet X)_n$$

$$= \underbrace{X_1 - X_0}_{i=1} + \underbrace{X_2 - X_1}_{i=2} + \dots + \underbrace{(X_\tau - X_{\tau-1})}_{i=\tau} + \underbrace{0}_{i=\tau+1} + 0 + \dots$$

dove $C_n^\tau := \mathbb{1}_{\tau > n}$

★ X^τ è processo adattato (a tempi discreti)

★ Una mg (sopra mg, sotto mg) discreta arrestata rimane mg (sopra mg, sotto mg)

■ OPTIONAL STOPPING THEOREM (DOOB) (a tempi discreti)

X superm g (sottom g) τ t.d.a. $\boxed{\tau < \infty \text{ q.c.}}$

a) $X_n^\tau \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} X_\tau$

b) Supponiamo valga una di queste:

i. τ limitato q.c. $\quad \exists T : \tau \le T$ q.c.

ii. X limitato q.c. $\quad \exists M : \forall n \geq 0 \ |X_n| \le M$ q.c.

iii. τ a media finita, X a incrementi limitati

$E(\tau) < \infty \quad \exists K : \forall n \geq 0 \ |X_{n+1} - X_n| \le K$ q.c.

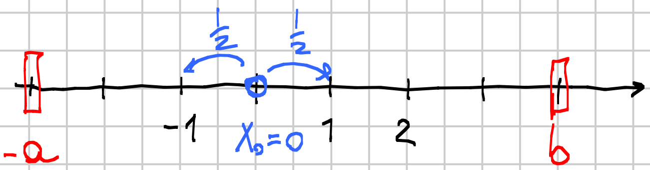
Allora:

$$\boxed{E(X_\tau) \le E(X_0)}$$

oppure $\geq$ se X è sottom g.

● Esempio 1

X SSRW $\quad X_0 \equiv 0$



$T_a := \inf\{n \geq 0 : X_n = -a\} < \infty$ q.c.

$T_b := \inf\{n \geq 0 : X_n = b\} < \infty$ q.c.

$P(T_a < T_b) = ?$

- T_a, T_b sono t.d.a.
- $\tau = T_a \wedge T_b$ è t.d.a. $< \infty$ q.c.
- X_τ se posso applicare O.S.T. $\Rightarrow E(X_\tau) = E(X_0) = 0$

$$0 = E(X_\tau) = b P(T_b < T_a) - a(1 - P(T_b < T_a))$$

$$\boxed{P(T_b < T_a) = \frac{a}{a+b}}$$

★ Indebolire le ipotesi: X una martingala

ii.' $\exists M$: q.c. $|X_n| \leq M \quad \boxed{\forall n \leq \tau}$

iii.' $E(\tau) < \infty$, $\exists K$: q.c. $|X_{n+1} - X_n| \leq K \quad \boxed{\forall n \leq \tau}$

Dim Considero X^τ siccome X era mg anche X^τ lo è

se ii.' per X $\Rightarrow$ ii. per X^τ

se iii.' per X $\Rightarrow$ iii per X^τ

Posso applicare O.S.T. alla mg $X^\tau =: Y$

a) $X_n^\tau = Y_n^\tau \xrightarrow[n\to\infty]{} Y_\tau = X_\tau^\tau = X_\tau$

b) $E(X_\tau) = E(Y_\tau) = E(Y_0) = E(X_0)$ ■

$X_0^\tau = X_{0 \wedge \tau} = X_0$

- Esempio 2

X SSRW $-a$; b barriere, T_a, T_b, τ come sopra

$$\boxed{E(\tau) = ab}$$

Dim X mg uscente da 0

$X_n^2 - n$ è mg uscente da 0

$M_n := \alpha X_n + \beta(X_n^2 - n)$ è mg qualunque siano α e β

$p(x) := \alpha x + \beta x^2$

se scelgo α, β in modo che $p(-a) = p(b)$ allora conosco $p(X_\tau)$

$$p(x) = (x-b)(x+a) + c = x^2 + (a-b)x - ab + c$$

$\beta = 1$ $\alpha = a - b$ ab

$M_n := (a-b)X_n + X_n^2 - n = p(X_n) - n$ $p(X_\tau) = p(b) = c = ab$

Applico O.S.T. a M

$$0 = E(M_0) = E(M_\tau) = E(p(X_\tau)) - E(\tau) = ab - E(\tau)$$

Verifico iii' $\quad |M_{n+1} - M_n| \leq |a-b| \cdot 1 + (a+b) \cdot 1 + 1 \leq K$ q.c. $\forall n \leq \tau$

$\boxed{E(\tau) < \infty}$ (non difficile)

ord 32

$$E(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(\tau = k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\tau > k)$$

(check)

$\tau \geq 0$ a valori in $\mathbb{Z}$

basta far vedere che la serie è sommabile

$$P(\tau > b) \leq 1 - P(X_1 = 1, X_2 = 2, \dots, X_b = b) = 1 - 2^{-b} = \alpha < 1$$

analogamente se parto da un punto diverso dall'origine

$$\forall n \geq 0 \quad P(\tau > n + a + b \mid \tau > n) \leq 1 - P(X_{n+1} = 1 + X_n, X_{n+2} = 1 + X_{n+1}, \dots, X_{n+a+b} = \dots) = \beta < 1$$

$X_n \in \{-a+1, -a+2, \dots, 0, \dots, b-1\}$

$$P(\overbrace{\tau > k(a+b)}^{A}) = P(\overbrace{\tau > (k-1)(a+b)}^{B}) P(\tau > \underbrace{k(a+b)}_{n+a+b} \mid \tau > \underbrace{(k-1)(a+b)}_{n})$$

$P(A) = P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \qquad A \subseteq B$

$$P(\tau > k(a+b)) \leq \beta P(\tau > (k-1)(a+b)) \leq \dots \leq \beta^k$$

$P(\tau > k)$ è monotona non crescente

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(T > k) \leq (a+b) \cdot 1 + (a+b) P(T > a+b) + (a+b) P(T > 2(a+b)) + \dots$$

$$\leq (a+b) \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k < \infty$$

→ Se abbiamo una sequenza di prove con una prob uniformemente lontana da 0 di successo, il tempo medio di successo è finito.

★ In particolare ho dimostrato che $\tau < \infty$ q.c.
(il fatto che T_a e T_b lo siano è molto più delicato)

Il fatto che T_a, T_b e τ siano t.d.a. segue da :

• Def Sia X un processo stocastico a valori in S e $A \subseteq S$
Allora si chiama hitting time di A per X la v.a. :

$$\boxed{\tau_A := \inf \{ n \geq 0 : X_n \in A \}}$$

★ Se X è adattato rispetto a $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathcal{F}, P)$
allora τ_A è un tempo d'arresto (qualsiasi A)

Dim $\forall n \geq 0$ $\{ \tau_A \leq n \} = \{ \exists m \leq n : X_m \in A \}$

$$= \bigsqcup_{m=0}^{n} \{ X_m \in A \} \in \mathcal{F}_n \qquad \square$$

↳ Nel nostro esempio : $T_a := \tau_{\{-a\}}$ $T_b := \tau_{\{b\}}$

$\tau := \tau_{\{-a\} \cup \{b\}}$

★ HW : Il min e il max di due t.d.a. sono t.d.a.

• Dim optional stopping theorem
X supermg τ t.d.a. $\tau < \infty$ q.c.

1) considero $\omega \in \Omega$ t.c. $\tau(\omega) < \infty$

allora $X_n^\tau(\omega) := X_{n \wedge \tau(\omega)}(\omega)$ def$^{\text{ente}}$ costante $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} X_n^\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)$$

$$\boxed{X_n^\tau \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} X_\tau}$$

(check che $\omega \longmapsto X_{\tau(\omega)}(\omega)$ sia una v.a.

$A \in \mathcal{B}$ $X_\tau^{-1}(A) = \{ \omega \in \Omega : X_{\tau(\omega)}(\omega) \in A \} = \bigcup_{n \geq 0} \{ \omega \in \Omega : \tau(\omega) = n, X_n(\omega) \in A \}$

$\bigsqcup_{n \geq 0} [\tau^{-1}(n) \cap X_n^{-1}(A)] \in \mathcal{F}$)

b) Claim: $X_n^\tau \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} X_\tau$

$$E(X_\tau) \overset{?}{\leq} E(X_0)$$

$$E(X_n^\tau) \leq E(X_0^\tau) = E(X_0) \qquad \forall n \geq 0$$

X^τ è superm.g

$$E(X^\tau) = \lim_{n\to\infty} E(X_n^\tau) \leq E(X_0)$$

Dim claim:

i. $\tau \leq T$ q.c. $\Rightarrow X_n^\tau \equiv X_\tau \quad n \geq T$ def.$^{\text{ente}}$ costante

ii. $|X_n| \leq M$ q.c. $\forall n$

$|X_n^\tau| = |X_{n\wedge\tau}| \leq M$ q.c. $\quad X_n^\tau \xrightarrow{L^1} X_\tau$ per (DOM)

iii. $X^\tau = X_0 + C^\tau \bullet X$

$$X_n^\tau = X_0 + \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\tau > i-1} \cdot (X_i - X_{i-1})$$

$$|X_n^\tau| \leq |X_0| + K \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\tau > i-1}}_{\leq \tau} \leq |X_0| + K\tau \in L^1(\Omega)$$

$i \leq \tau$

per (DOM) $X_n^\tau \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} X_\tau$

☆ Ultimo caso: X superm.g (non sottom.g), $\tau < \infty$ q.c.

iv. $X_n \geq 0$ q.c. $\forall n$

Allora $E(X_\tau) \leq E(X_0)$

Dim HW → Lemma di Fatou sostituisce la convergenza L^1

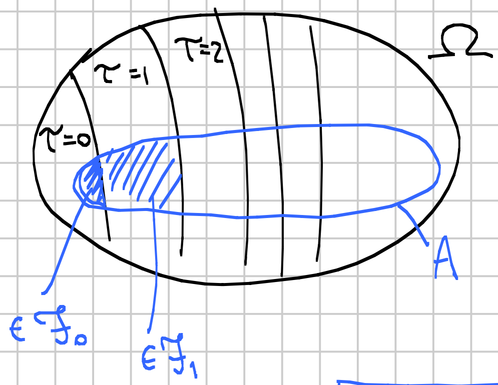
☒ OPTIONAL SAMPLING THEOREM
DISUGUAGLIANZA MASSIMALE } caso discreto

• Sigma-algebra di un tempo di arresto

Def $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}, \mathcal{F}, P)$, τ t.d.a. allora denotiamo con $\mathcal{F}_\tau$:

$$\boxed{\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : \forall n \geq 0 \ A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n\}}$$

gli eventi conoscibili entro il tempo casuale τ



☆ Equivalente a : $\boxed{\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : \forall n \geq 0 \ A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}}$
(anche a tempi continui)

☆ Verifico buona definizione di $\mathcal{F}_m$ se considero $m \in \mathbb{N}$ come t.d.a. costante. Sia $\underline{m} : \Omega \to \{m\}$

$$\mathcal{F}_{\underline{m}} := \{A \in \mathcal{F} : \forall n \geq 0 \ A \cap \{\underline{m} = n\} \in \mathcal{F}_n\} = \bigcap_{n \geq 0} \{A \in \mathcal{F} : \dots\}$$

$\{\underline{m} = n\} = \{\omega \in \Omega : \underline{m}(\omega) = n\}$

$$= \{A \in \mathcal{F} : A \cap \Omega \in \mathcal{F}_m, \ A \cap \emptyset \in \mathcal{F}_n \ \forall n \neq m\}$$

$$= \{A \in \mathcal{F} : A \in \mathcal{F}_m\} = \mathcal{F}_m$$

★ Se $(X_n)_{n\geq 0}$ è adattato, allora $\boxed{X_\tau \text{ è } \mathcal{F}_\tau\text{-misurabile}}$

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\qquad X_\tau^{-1}(A) = \bigsqcup_{n\geq 0}\left(X_n^{-1}(A) \cap \{\tau = n\}\right)$

per vedere se $X_\tau^{-1}(A) \in \mathcal{F}_\tau$ applico la def.

$\forall n \geq 0 \qquad \{\tau = n\} \cap X_\tau^{-1}(A) = X_n^{-1}(A) \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$

τ tda $\Rightarrow \in \mathcal{F}_n$

X adattato $\Rightarrow \in \mathcal{F}_n$

■ Optional sampling thm. (Doob, tempi discreti)

$(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}, \mathcal{F}, P)$ $\qquad X = (X_n)_{n\geq 0}$ supermg (sottomg)

τ_1, τ_2 tda. $\qquad \boxed{\tau_1 \leq \tau_2 \leq k \text{ q.c.}}$ $\qquad$ limitati e ordinati

Allora $\qquad$ i. $X_{\tau_1} \in L^1(\mathcal{F}_{\tau_1})$

$\boxed{\text{ii. } E(X_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}) \leq X_{\tau_1} \text{ q.c.}}$ $\qquad (\geq$ sottomg$)$

↳ generalizza: $E(X_m \mid \mathcal{F}_n) \leq X_n$ q.c. $\qquad m \geq n$

Dim $\quad$ i. X_{τ_1} è $\mathcal{F}_{\tau_1}$-misurabile : visto sopra

$$\|X_{\tau_1}\|_{L^1} = E|X_{\tau_1}| = \sum_{n\geq 0} E(|X_{\tau_1}|; \tau_1 = n) \leq \sum_{n=0}^{k} E(|X_n|) < \infty$$

HW: Trovare $(X_n)_{n\geq 0}$ sottomg e τ tda. t.c. $X_\tau \notin L^1$

ii. Sia $Y = E(X_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1})$ q.c. (una versione)

Siccome Y e X_{τ_1} sono $\mathcal{F}_{\tau_1}$-misurabili entrambe allora per verificare che $Y \leq X_{\tau_1}$ basta che:

$$E(Y; A) \overset{?}{\leq} E(X_{\tau_1}; A) \qquad \forall A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$$

$$E(Y;A) \underset{\text{def } Y}{=} E(X_{\tau_2};A) \overset{?}{\leq} E(X_{\tau_1};A) \qquad \forall A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$$

Sia $M_n := X_n^{\tau_2}$ super mg come X_n

$$E(X_{\tau_1};A) = E(X_{\tau_1}^{\tau_2};A) = E(M_{\tau_1};A) \overset{?}{\geq} E(M_k;A) = E(X_{\tau_2};A)$$

$$E(M_{\tau_1};A) = \sum_{n=0}^{k} E(M_{\cancel{\tau_1}\, n}; A\cap\{\tau_1 = n\}) \geq \sum_{n=0}^{k} E(E(M_k|\mathcal{F}_n); \underbrace{A\cap\{\tau_1=n\}}_{A\in\mathcal{F}_{\tau_1}})$$

$A \in \mathcal{F}_{\tau_1} \Rightarrow A\cap\{\tau_1=n\} \in \mathcal{F}_n$

$$= \sum_{n=0}^{k} E(E(M_k \mathbb{1}_{A\cap\{\tau_1=n\}} | \cancel{\mathcal{F}_n}))$$

$$= \sum_{n=0}^{k} E(M_k; A\cap\{\tau_1=n\}) = E(M_k;A) \qquad \blacksquare$$

---

ora 34

- **Corollario**: $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ X super mg (sotto mg)

τ_1, τ_2 tda. limitati. Allora:

$$\boxed{E(X_{\tau_2}; \tau_1 \leq \tau_2) \leq E(X_{\tau_1}; \tau_1 \leq \tau_2)} \qquad (\geq \text{ sotto mg})$$

<u>Dim</u> $\sigma := \tau_1 \wedge \tau_2$ $\qquad \sigma \leq \tau_2 \leq k$ ← OPT. SAMPLING

$$E(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_\sigma) \leq X_\sigma \text{ q.c.} \qquad \mathbb{1}_{\tau_1\leq\tau_2}$$

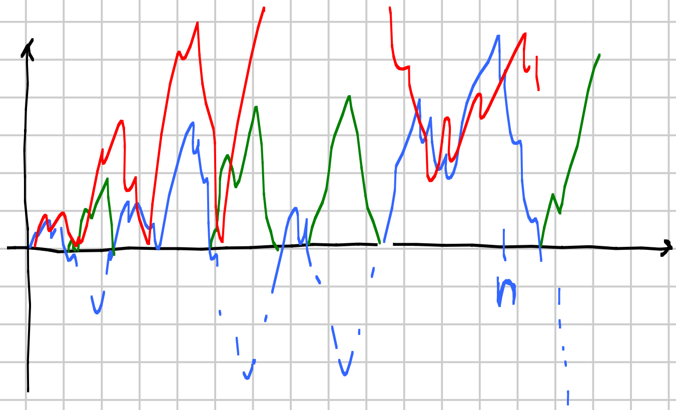
$$E(X_{\tau_2};\tau_1\leq\tau_2) = E(E(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_\sigma);\tau_1\leq\tau_2) \overset{\text{SAMPLING}}{\leq} E(X_\sigma;\tau_1\leq\tau_2) = E(X_{\tau_1};\tau_1\leq\tau_2)$$

$\{\tau_1 \leq \tau_2\} \in \mathcal{F}_\sigma$: check!

■ Disuguaglianza massimale (Doob, caso discreto)

$(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ $\quad X = (X_n)_{n\geq 0}$ $\boxed{\text{sotto mg}}$ $\quad X_n \geq 0 \ \forall n$

$$\boxed{P\left(\max_{0\leq k\leq n} X_k \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} E(X_n)} \qquad \lambda > 0, \ n \geq 0$$



controlla tutti i tempi contemporaneamente ($k \leq n$)

★ Sembra la disuguaglianza di Markov

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad X \geq 0$ v.a.

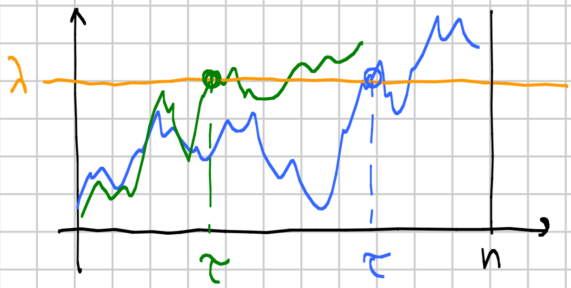
$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} E(X)$$

Dim: $E(X) \geq E(X ; X \geq \lambda) \geq E(\lambda ; X \geq \lambda) = \lambda P(X \geq \lambda)$

Dim $\quad \tau := \inf\{n \geq 0 : X_n \geq \lambda\}$ $\quad$ hitting time $\Rightarrow$ t.d.a.

$$\max_{0\leq k\leq n} X_k \geq \lambda \iff \tau \leq n$$

$$P(\tau \leq n) \overset{?}{\leq} \frac{1}{\lambda} E(X_n)$$



$$E(X_n) \geq E(X_n ; \tau \leq n) \geq E(X_{\tau_*} ; \tau \leq n) \geq E(\lambda ; \tau \leq n) = \lambda P(\tau \leq n)$$

cor. $\tau_1 = \tau \wedge n$, $\tau_2 = n$

Se X supera λ prima di n, la media di X_n sarà maggiore di λ

$\boxed{\text{III}}$ MARTINGALE A TEMPI CONTINUI

- **Def** Hitting time di A per X

$$\tau_A := \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}$$

★ Se X ha traiettorie continue e A è chiuso allora τ_A è un t.d.a.

(HW) $\qquad \{\tau_A \leq t\} \overset{?}{\in} \mathcal{F}_t$

$$\{\tau_A \leq t\} = \{\omega \in \Omega : X_q \in A \text{ per } q \in \mathbb{Q} \cap [0,t]\} \in \mathcal{F}_t$$

MARTINGALE A TEMPI CONTINUI

$(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ $\quad X = (X_t)_{t\geq 0}$ adattato

- **Def** Hitting time di A per X

$$\tau_A := \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}$$

★ Se X ha traiettorie continue e A è chiuso allora τ_A è un t.d.a.

★ Se X ha traiettorie continue a destra, A è aperto e la filtrazione è continua a destra, allora τ_A è un t.d.a.

↳ **Def** Una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ è continua a destra (a sinistra) se

$$\forall t \geq 0 \qquad \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$$

$$\left(\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-} := \bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s \right)$$

Dim (prima) A chiuso, devo dimostrare che $\{\tau_A \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t$

$$\{\tau_A \leq t\} = \{\omega \in \Omega : \inf_{s\in[0,t]} d(X_s, A) = 0\} \quad q.c.$$

$s \mapsto d(X_s, A)$ funzione continua

$$= \{\omega \in \Omega : \inf_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} d(X_s, A) = 0\} \qquad \square$$

(seconda) ⟶ Revuz – Yor

Reward: 1 pto in più all'esame a chi trova l'errore nella dimostrazione delle dispense

• **Def** $\mathcal{F}_\tau$. τ t.d.a.

$$\boxed{\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t \geq 0\}}$$

★ Se X è un processo progr. misurabile e $\tau < \infty$ q.c. allora X_τ è $\mathcal{F}_\tau$-mis.

(HW) (Baldi o Revuz - Yor)

■ OPTIONAL SAMPLING THM

(Caso continuo, torna utile un po' di teoria su martingale e famiglie uniformemente integrabili)

• **Def** Una famiglia $H \subseteq L^1(\Omega)$ di v.a.a. si dice uniformemente integrabile se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists K > 0 \ \forall X \in H \quad E(|X| ; |X| > k) < \varepsilon}$$

★ Per una singola v.a. $X \in L^1(\Omega)$ vale:

- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k > 0 : E(|X| ; |X| > k) < \varepsilon$

o anche (check entrambe)

- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall G \in \mathcal{F} : P(G) < \delta \Rightarrow E(|X| ; G) < \varepsilon$

• **Proposizione**: $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{L^1} X$ se e solo se $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} X$ e $(X_n)_{n \geq 1}$ è u.i.

no dim (Williams)

★ $X_n \xrightarrow{q.c.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

$X_n \xrightarrow{L^1} X \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{P} X$, (X_n) u.i.

(MON) e (DOM) entrambi servono a passare da

$$X_n \xrightarrow{q.c.} X \quad \text{a} \quad X_n \xrightarrow{L^1} X$$

La prop. sopra è la massima generalizzazione.

- Convergenza di martingale : quasi certa

$(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ $\quad X = (X_n)_{n\geq 0}$ supermg

$\boxed{\sup_n E(X_n^-) < \infty}$ (ad esempio SSRW no e mg prodotto sì)

Allora : X_n converge q.c. per $n \to \infty$

(no dim)

- Prop : $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad X \in L^1$ $\quad H := \{ Y \in L^1 : \exists\, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F},\ Y = E(X|\mathcal{G}) \}$

Allora H è uniformemente integrabile

Dim Sia $Y \in H$ $\quad |Y| = |E(X|\mathcal{G})| \leq E(|X|\,|\mathcal{G})$ q.c.

(c Jens)

$$E(|Y|\,;\,|Y|>k) \leq E\left(E(|X|\,|\mathcal{G})\,\mathbb{1}_{|Y|>k}\right) = E(|X|\,;\,|Y|>k)$$

$\sigma(Y) \subseteq \mathcal{G}$

Se scelgo k in modo che indipendentemente da Y $P(|Y|>k) < \delta$ e scelgo δ in modo che $\forall G \in \mathcal{F}$ $P(G) < \delta \Rightarrow E(|X|\,;\,G) < \varepsilon$ ho vinto

$$P(|Y|>k) \leq \frac{1}{k} E(|Y|) \leq \frac{1}{k} E(|X|)$$

dis. Markov

$\square$

- <u>Optional sampling theorem</u> (Doob, continuo)

$(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\ge0}, \mathcal{F}, P)$ $\quad X = (X_t)_{t\ge0}$ supermg (sotto mg)

X con traiettorie q.c. continue a destra

$\tau_1 \le \tau_2 \le k$ q.c. $\quad$ tempi di arresto

Allora:

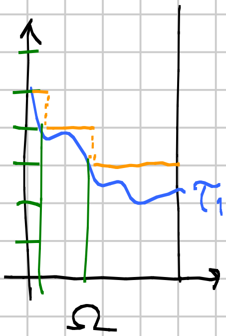
i. $X_{\tau_1} \in L^1(\mathcal{F}_{\tau_1})$

ii. $\boxed{E(X_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}) \le X_{\tau_1} \text{ q.c.}}$

<u>Dim</u> $\quad$ i. X supermg $\to$ adattato + cont a dx $\Big\}$ X progr. mis. + $\tau_1 < \infty$ q.c. $\Big\}$ X_{τ_1} è $\mathcal{F}_{\tau_1}$-mis

(L^1 dopo)

ii. (Baldi) $\quad$ Approssimo i tempi di arresto



$$\tau_i^{(n)} := \lceil 2^n \tau_i \rceil 2^{-n} \qquad i = 1,2 \quad n \ge 0$$

$$\tau_i \in \big((k-1)2^{-n} ; k 2^{-n}\big] \to \tau_i^{(n)} = k 2^{-n}$$

$$\tau_i^{(n)} \le t \iff \lceil 2^n \tau_i \rceil \le 2^n t \iff 2^n \tau_i \le \lfloor 2^n t \rfloor$$

$\lceil x \rceil \le y \iff \exists n \in \mathbb{Z} \ x \le n \le y \iff x \le \lfloor y \rfloor$

$$\iff \underbrace{\tau_i \le 2^{-n} \lfloor 2^n t \rfloor}_{\in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t} = s \le t$$

<u>$\tau_i^{(n)}$ è un t.d.a.</u>

$\forall n : \tau_1^{(n)} \le \tau_2^{(n)} \le k+1$ q.c.

$\tau_i \le \tau_i^{(n)} \le \tau_i^{(n+1)}$ q.c. $\quad \forall i$

$\tau_i^{(n)} \searrow \tau_i$ q.c. per $n \to \infty$

Siccome $\tau_i^{(n)}$ assume un numero finito di valori, posso applicare lo optional sampling thm a tempi discreti

$$E\left(X_{\tau_2^{(n)}} \mid \mathcal{F}_{\tau_1^{(n)}}\right) \leq X_{\tau_1^{(n)}} \quad q.c. \quad \forall n \geq 0$$

Condiziono ad $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_1^{(n)}}$

$$E\left(X_{\tau_2^{(n)}} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}\right) \leq E\left(X_{\tau_1^{(n)}} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}\right) \quad q.c. \quad \forall n \geq 0$$

$$X_{\tau_i^{(n)}} \xrightarrow[n \to \infty]{q.c.} X_{\tau_i} \qquad \tau_i^{(n)} \xrightarrow{q.c.} \tau_i \quad + X. \text{ cont a dx}$$

$$X_{\tau_i^{(n)}} \neq E\left(X_{\tau_i(0)} \mid \mathcal{F}_{\tau_i^{(n)}}\right) \text{ q.c.} \qquad \text{sono u.i.}$$

- Niente lezione la settimana prossima.
- Dimostrazione opt. sampling thm.

Condiziono ad $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_1^{(n)}}$

$$E\left(X_{\tau_2^{(n)}} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}\right) \leq E\left(X_{\tau_1^{(n)}} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}\right) \quad \text{q.c.} \qquad \forall n \geq 0$$

$X_{\tau_i^{(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{q.c.}} X_{\tau_i}$ $\qquad \tau_i^{(n)} \xrightarrow{\text{q.c.}} \tau_i \quad + X_{\cdot}$ cont a dx

$\boxed{\text{Se}}$ dimostro che c'è anche convergenza L^1 $\quad X_{\tau_i^{(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} X_{\tau_i} \quad i=1,2$

allora posso passare al limite nelle speranze condizionali e ottengo

$$E\left(X_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}\right) \leq E\left(X_{\tau_1} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}\right) = X_{\tau_1} \quad \text{q.c.} \qquad \text{e ho finito.}$$

Dimostro il claim (se...). Devo verificare che $\left(X_{\tau_i^{(n)}}\right)_{n\geq 0}$ è u.i.

vedi ora 39

DISUGUAGLIANZA MASSIMALE CONTINUA

$(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ $\quad X = (X_t)_{t\geq 0}$ $\boxed{\text{sotto mg}}$ $\quad X_t \geq 0$ q.c.

con traiettorie continue.

Allora $\forall \lambda > 0,\ t \geq 0$

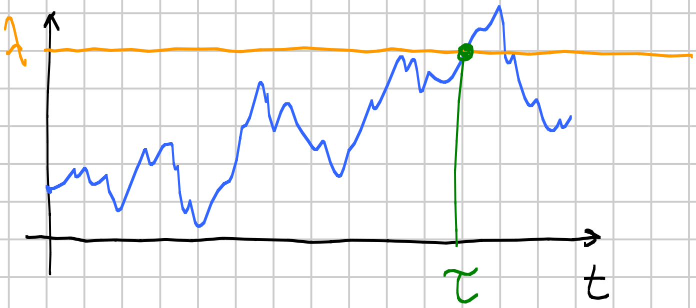
$$\boxed{P\left(\max_{[0,t]} X_s \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} E(X_t)}$$

Dim.

$\tau := \inf\{t \geq 0 : X_t \geq \lambda\}$

hitting time $[\lambda; +\infty)$

insieme chiuso + traiettorie continue $\rightarrow$ t.d.a.



$$\max_{[0,t]} X_s \geq \lambda \iff \tau \leq t$$

ora 38

$$E(X_t) \geq E(X_t; \tau \leq t) \geq E(X_{\tau_1}; \tau \leq t) = E(X_\tau; \tau \leq t) = \lambda P(\tau \leq t)$$

$=\lambda$

$\tau_1 := \tau \wedge t \quad \tau_2 = t \quad$ t.d.a. limitati

corollario ora 34

$$\Rightarrow \quad P(\tau \leq t) \leq \frac{1}{\lambda} E(X_t) \qquad \square$$

■ MG ARRESTATA È MG (A TEMPI CONTINUI)

A tempi discreti $(M_n)_{n\geq 0}$ mg $\qquad M_n^\tau := M_{n\wedge\tau}$ processo arrest.

M^τ adattato $\quad M^\tau = 1\!\!1_n \bullet M + M_0 \longrightarrow$ mg.

$(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P) \quad X = (X_t)_{t\geq 0}$ supermg (o sottomg)
a traiettorie continue. τ un t.d.a.

Allora X^τ è una supermg (o sottomg)

Dim $\quad X^\tau = (X_t^\tau)_{t\geq 0} \qquad X_t^\tau := X_{t\wedge\tau}$

Devo verificare che:

i. $X_t^\tau \in L^1(\mathcal{F}_t) \quad \forall t\geq 0$
ii. $E(X_t^\tau \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s^\tau$ q.c. $\quad \forall s\leq t$

i. $\tau_1 := t\wedge\tau$ t.d.a. q.c. limitato
$X_t^\tau = X_{t\wedge\tau} = X_{\tau_1}$ è $\mathcal{F}_{\tau_1}$-mis. $\quad \tau_1 \leq t \quad \mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_t$ è $\mathcal{F}_t$-mis

$X_{\tau_1} \in L^1(\mathcal{F}_{\tau_1})$ opt. sampling thm. i.

ii. $\tau_2 := s\wedge\tau$ t.d.a. q.c. limitato $\quad \tau_2 \leq \tau_1$ q.c.

$$E(X_t^\tau \mid \mathcal{F}_{\tau_2}) := E(X_{\tau_1} \mid \mathcal{F}_{\tau_2}) \leq X_{\tau_2} =: X_{s\wedge\tau} =: X_s^\tau \quad \text{q.c.}$$

ci vorrebbe $\mathcal{F}_s$ $\qquad$ opt. samp. thm ii.

$$E(X_t^\tau \mid \mathcal{F}_s) \overset{?}{\leq} X_s^\tau \iff \forall G\in\mathcal{F}_s \quad E(X_t^\tau ; G) \leq E(X_s^\tau ; G)$$

$$E(X_t^\tau ; G) = E(X_t^\tau ; G\cap\{\tau\leq s\}) + E(X_t^\tau ; \underbrace{G\cap\{\tau > s\}}_{\in \mathcal{F}_{\tau_2}})$$

$\tau\leq s\leq t$
$X_t^\tau = X_s^\tau$ q.c.

$G\cap\{\tau>s\}\cap\{\tau_2\leq u\} \in \mathcal{F}_u \;\forall u$

$$G \cap \{\tau > s\} \cap \{\tau_2 = \tau \wedge s \le u\} \in \mathcal{F}_u \quad \forall u \ge 0$$

$$u < s < \tau \;\Rightarrow\; \tau_2 = s \le u \quad \text{no} \qquad \emptyset \in \mathcal{F}_u$$

$$u \ge s \qquad s < \tau,\ \tau_2 = s \qquad G \cap \{s < \tau\} \in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_u$$

$$G \cap \{\tau > s\} \in \mathcal{F}_{\tau_2}$$

$$E(X_t^\tau; G) \le E\left(X_s^\tau; G \cap \{\tau \le s\}\right) + E\left(X_s^\tau; G \cap \{\tau > s\}\right) = E\left(X_s^\tau; G\right) \qquad \square$$

▣ CONTINUITÀ DELLE TRAIETTORIE DELL'INTEGRALE STOCASTICO

$(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \ge 0}, \mathcal{F}, P)$ $\quad B = (B_t)_{t \ge 0}$ un BM

$T > 0 \qquad X \in M^2_{0,T}$

$$I = (I_t)_{t \ge 0} \qquad I_t := I_{0,t}\left(X|_{[0,t]}\right) = \int_0^t X_s \, dB_s \qquad t \in [0,T]$$

$\forall t$ definito per q.o. ω

Allora I ammette una modificazione continua

<u>Dim</u> Recall:

$$I_{0,t}\left(X|_{[0,t]}\right) := L^2\text{-}\lim_{n \to \infty} I_t^{(n)}$$

$$I_t^{(n)} := \sum_{i=0}^{N-1} c_i^{(n)} \left(B_{\delta_{i+1}^{(n)} \wedge t} - B_{\delta_i^{(n)} \wedge t}\right) \qquad \forall t \in [0,T]$$

dove $\delta^{(n)} \in \Delta_{0,T} \qquad \delta^{(n)} = \left(\delta_0^{(n)}, \delta_1^{(n)}, \dots, \delta_N^{(n)}\right) \qquad N = N_n$

$0 = \delta_0^{(n)} \le \delta_1^{(n)} \le \dots \le \delta_N^{(n)} = T$

$c_i^{(n)} \in L^2\left(\mathcal{F}_{\delta_i^{(n)}}\right)$ dipende da X

■ Mettiamo a posto la dimostrazione dell'opt. samp. thm.

$(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ $\quad (X_t)_{t\geq 0}$ supermg cont a dx

$i=1,2$ $\quad \tau_i$ t.d.a. $\quad n\geq 0$ $\quad \tau_i^{(n)}$ t.d.a. assume un numero finito di valori

$\tau_i^{(n)} \downarrow \tau_i$ $\quad$ q.c. $n\to\infty$

opt. sampl. thm discreto $\Rightarrow$ $E\left(X_{\tau_i^{(n)}} \mid \mathcal{F}_{\tau_i^{(n+1)}}\right) \leq X_{\tau_i^{(n+1)}}$ q.c.

Devo dimostrare che $(Y_n)_{n\geq 0}$ è u.i. $\quad$ $\underset{\displaystyle Y_n}{\shortparallel}$ $\quad$ $\underset{\displaystyle \mathcal{G}_{n+1}}{\shortparallel}$

★ $(Y_n)_{n\geq 0}$ è una supermg "backward"

Y_n è $\mathcal{G}_n$-misurabile $\qquad Y_n = X_{\tau_i^{(n)}}$ $\quad \mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{\tau_i^{(n)}}$

$\mathcal{G}_n \supseteq \mathcal{G}_{n+1} \supseteq \dots$ $\quad$ al contrario rispetto alle normali filtrazioni

$E(Y_n \mid \mathcal{G}_{n+1}) \leq Y_{n+1}$ q.c.

$E(Y_n) \leq E(Y_{n+1}) \leq \dots \leq C < \infty$ $\qquad$ O.S.A.T. $0, \tau_i^{(n)}$ tda

infatti $\forall n\geq 0$ $\quad E(Y_n \mid \mathcal{F}_0) = E(X_{\tau_i^{(n)}} \mid \mathcal{F}_0) \leq X_0$ q.c. $\Rightarrow E(Y_n) \leq E(X_0)$

$\forall \lambda > 0$ $\quad \lambda P(|Y_n| > \lambda) \underset{\text{Markov}}{\leq} E(|Y_n|) = E(Y_n + 2Y_n^-) \leq C + 2E(Y_0^-) = C_1 < \infty$

$E(Y_m \mid \mathcal{G}_n) \leq Y_n$ q.c. $\quad \forall n \geq m$

$$\boxed{\forall a\in\mathbb{R} \quad E(Y_m ; Y_n \leq a) \leq E(Y_n ; Y_n \leq a)}$$

$\{Y_n \leq a\} \in \mathcal{G}_n$

$\xrightarrow{m=0,\ a=0}$ $-E(Y_n^-) = E(Y_n ; Y_n \leq 0)$

$\geq E(Y_0 ; Y_n \leq 0) \geq E(Y_0 ; Y_0 \leq 0)$

$= -E(Y_0^-)$

$a=-\lambda<0 \quad m=0 \longrightarrow E(-Y_n;Y_n<-\lambda) \le E(-Y_0;Y_n<-\lambda)$

$$\begin{aligned} E(-Y_n;Y_n<-\lambda) &\le E(-Y_0;Y_n<-\lambda) \\ \| \qquad & \\ E(Y_n^-;Y_n^->\lambda) & \qquad \le E(|Y_0|;Y_n<-\lambda) < \varepsilon \end{aligned}$$

$\forall n\geq 0 \quad P(|Y_n|>\lambda) \le \frac{1}{\lambda} C_1 \qquad \forall \lambda>0$

$$P(Y_n<-\lambda) \le P(|Y_n|>\lambda) \le \frac{1}{\lambda}C_1 \le \delta$$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : P(H)\le\delta \Rightarrow E(|Y_0|;H)<\varepsilon$

$\exists \lambda>0 : E(|Y_0|;Y_n<-\lambda)<\varepsilon \quad \forall n\geq 0$

↳ $\forall\varepsilon>0 \ \exists\lambda>0 : \forall n\geq 0 \ E(Y_n^-;Y_n^->\lambda)<\varepsilon$

↳ $(Y_n^-)_{n\geq 0}$ è u.i.

$\lambda>0 \quad E(Y_n^+;Y_n^+>\lambda) = E(Y_n;Y_n>\lambda) = E(Y_n)-E(Y_n;Y_n\le\lambda)$

$a=\lambda$, $m\le n$: $\le E(Y_n)-E(Y_m;Y_n\le\lambda) = \underbrace{E(Y_n-Y_m)}_{<\varepsilon} + E(Y_m;Y_n>\lambda)$

$\lim_{n\to\infty} E(Y_n)<\infty \qquad \forall\varepsilon>0$ scelgo $m : E(Y_n-Y_m)<\varepsilon \ \forall n\geq m$

$$E(Y_m;Y_n>\lambda) \le E(|Y_m|;Y_n>\lambda) \le \varepsilon$$

scelgo $\delta>0 : P(H)<\delta \Rightarrow E(|Y_m|;H)\le\varepsilon$; scelgo $\lambda>0 : P(Y_n>\lambda)<\delta \ \forall n$

↳ $\forall\varepsilon>0 \ \exists\lambda>0 : \forall n\geq 0 \ E(Y_n^+;Y_n^+>\lambda)\le\varepsilon$

↳ $(Y_n^+)_{n\geq 0}$ è u.i.

$\Rightarrow (Y_n)_{n\geq 0}$ è u.i.

Continuità dell'integrale stocastico

$(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ $\quad B=(B_t)_{t\geq 0}$ un BM

$T>0 \qquad X \in M^2_{0,T}$

$$I=(I_t)_{t\geq 0} \qquad I_t := I_{0,t}\left(X|_{[0,t]}\right) = \int_0^t X_s dB_s \qquad t\in[0,T]$$

$\forall t$ definito per q.o. ω

Allora I ammette una modificazione continua

<u>Dim</u> Presa una successione di partizioni $n\geq 1$ $\delta^{(n)} \in \Delta_{0,T}$

$\delta^{(n)} = \left(\delta_0^{(n)}, \delta_1^{(n)}, \dots, \delta_N^{(n)}\right) \quad N=N_n$

$0=\delta_0^{(n)} \leq \delta_1^{(n)} \leq \dots \leq \delta_N^{(n)} = T$

$\forall t\in[0,T]$

$$I_{0,t}\left(X|_{[0,t]}\right) := L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} I_t^{(n)}$$

$$I_t^{(n)} := I_{0,t}\left(X^{(n)}|_{[0,t]}\right) := I_{0,t}\left(\sum_{i=0}^{N-1} c_i^{(n)} \mathbb{1}_{[\delta_i^{(n)}, \delta_{i+1}^{(n)})}\Big|_{[0,t]}\right) := \sum_{i=0}^{N-1} c_i^{(n)}\left(B_{\delta_{i+1}^{(n)}\wedge t} - B_{\delta_i^{(n)}\wedge t}\right)$$

$c_i^{(n)} \in L^2(\mathcal{F}_{\delta_i^{(n)}})$ dipende da X

$$c_i^{(n)} := \frac{1}{\delta_i^{(n)} - \delta_{i-1}^{(n)}} \int_{\delta_{i-1}^{(n)}}^{\delta_i} X_s\, ds$$

$\star$ Integrale stocastico di un processo M^2 è mg L^2

$$X^{(n)} \in M^2_{0,T} \quad \Rightarrow \left(I_t^{(n)}\right)_{t\geq 0} \text{ è mg } L^2 \quad \forall n\geq 1$$

$$\forall n\geq 2 \quad P\left(\max_{[0,T]} \Big|\underbrace{I_t^{(n)} - I_t^{(n-1)}}_{\text{mg}}\Big| \geq a_n\right) = P\left(\max_{[0,T]} \underbrace{\left(I_t^{(n)} - I_t^{(n-1)}\right)^2}_{\text{sotto mg} \geq 0} \geq a_n^2\right)$$

$$\underset{\text{disug. max}}{\leq} \frac{1}{a_n^2} E\left[\left(I_T^{(n)} - I_T^{(n-1)}\right)^2\right] \underset{\text{lin. di } I_{0,T}}{=} \frac{1}{a_n^2} E\left[\left(I_{0,T}\left(X^{(n)} - X^{(n-1)}\right)\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{a_n^2} \| X^{(n)} - X^{(n-1)} \|^2_{M^2_{0,T}}$$

Sia $(a_n)_{n \geq 1}$ sommabile qualsiasi

$X^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{M^2} X$ scelgo $(\delta^{(n)})_{n\geq 1}$ tale che la convergenza sia così veloce che $\frac{1}{a_n^2} \| X^{(n)} - X^{(n-1)} \|^2_{M^2}$ sia sommabile

Per BC 1 q.o. ω $\exists\, n_0(\omega)$: $\forall n \geq n_0(\omega)$

$$\max_{[0,T]} \left| I_t^{(n)} - I_t^{(n-1)} \right| < a_n$$ sommo per $n \geq n_0(\omega) \rightarrow$ viene $< \infty$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ q.o. ω $\exists\, n_1(\omega)$: $\forall m, n \geq n_1(\omega)$

$$\max_{[0,T]} \left| I_t^{(m)} - I_t^{(n)} \right| \leq \sum_m^n \max \left| I_t^{(k)} - I_t^{(k-1)} \right| < \sum_{n_1}^{\infty} \sim < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ q.o. ω $(I_\cdot^{(n)}(\omega))_{n\geq 1}$ successione di funzioni continue è di Cauchy rispetto alla norma del sup

↳ converge uniformemente su $[0,T]$ a una funzione continua

$$I_\cdot^{(\infty)}(\omega) := \lim_{n\to\infty} I_\cdot^{(n)}(\omega)$$

Fissato $t \in [0,T]$, per $n \to \infty$

$I_t^{(n)} \xrightarrow{L^2} I_t$

$I_t^{(n)} \xrightarrow{q.c.} I_t^{(\infty)}$

$\Big\}$ $I_t = I_t^{(\infty)}$ q.c. (limite in probabilità è unico q.c.)

↳ $\forall t$ $I_t = I_t^{(\infty)}$ q.c.

modificazione a traiettorie continue

★ Da adesso supponiamo che $\int_0^t X_s dB_s$ sia quella a traiettorie cont.

III INTEGRALE STOCASTICO PER PROCESSI PIÙ GENERALI

- **Teorema di localizzazione**

$(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P)$, B un BM, $T>0$, $X, Y \in M^2_{0,T}$

$A \in \mathcal{F}$

(se X e Y coincidono su A, allora anche i loro integrali stocastici)

$\forall \omega \in A$ Leb-q.o. $t \in [0,T]$, $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$

Allora: q.o. $\omega \in A$ $I_\cdot(X) = I_\cdot(Y)$ su $[0,T]$

Dim per linearità wlog $Y \equiv 0$

so che $\forall \omega \in A$ Leb-q.o. $t \in [0,T]$, $X_t(\omega) = 0$

$$c_i^{(n)} := \frac{1}{\delta_i^{(n)} - \delta_{i-1}^{(n)}} \int_{\delta_{i-1}^{(n)}}^{\delta_i} X_s \, ds = 0 \quad \text{q.o. } \omega \in A$$

$$I_t^{(n)} = \sum_{i=0}^{N-1} c_i^{(n)} \left(B_{\delta_{i+1}^{(n)} \wedge t} - B_{\delta_i^{(n)} \wedge t} \right) = 0 \quad \text{q.o. } \omega \in A$$

Prendo $(\delta^{(n)})_{n\geq 1}$ t.c. $I_\cdot^{(n)} \xrightarrow{\text{q.c.}} I_\cdot^{(\infty)}$ continua

$$\Rightarrow I_\cdot^{(\infty)} = 0 \quad \text{q.o. } \omega \in A \qquad \square$$

- **Gli spazi $\mathcal{M}^2$ e $\mathcal{M}^2_{loc}$**

$$\mathcal{M}^2 := \bigcap_{T>0} M^2_{0,T} = \left\{ X = (X_t)_{t\geq 0} \text{, progr. mis, } E\int_0^t X_s^2 \, ds < \infty \ \forall t \right\}$$

$$\mathcal{M}^2_{loc} := \left\{ X = (X_t)_{t\geq 0} \text{, progr. mis, } \int_0^t X_s^2 \, ds < \infty \text{ q.c. } \forall t \right\}$$

$$E Z < \infty \Rightarrow Z < \infty \text{ q.c.} \longrightarrow \mathcal{M}^2 \subseteq \mathcal{M}^2_{loc}$$

☆ X adattato e a traiettorie continue, $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$

Domani mar 7 giugno lezione di recupero 10:30 – 12:30

INTEGRALE STOCASTICO DI PROCESSI $\mathcal{M}^2_{loc}$

Thm $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ B un BM $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$

$n \geq 1$ $\quad \tau_n := \inf\left\{ t \geq 0 : \int_0^t X_s^2 \, ds \geq n \right\}$

1) τ_n è un t.d.a.

2) $Y^{(n)} := X \mathbb{1}_{[0, \tau_n)} \in \mathcal{M}^2$

3) $M^{(n)}_\cdot := \int_0^\cdot Y_s^{(n)} dB_s$ mg continua L^2

$n \to \infty$ $\quad M^{(n)}$ converge q.c. in tutte le topologie (def. ente costante)

4) $M_\cdot := \lim_{n\to\infty} M^{(n)}_\cdot$ ha traiettorie continue

5) Sia per ogni $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$ $\tilde{I}(X) = M_\cdot$ questo processo
Allora se $X \in \mathcal{M}^2$ e $I(X)$ è il solito integrale di Itô, $I(X) = \tilde{I}(X)$

6) Se $H = \left\{ \int_0^t X_s^2 ds \leq c \right\}$ per t e c fissati, allora

$$\tilde{I}(X \mathbb{1}_H) = \tilde{I}(X) \mathbb{1}_H \quad \text{q.c. in } [0, t]$$

Dim 1) $\forall t \geq 0$ $\quad W_t := \int_0^t X_s^2 ds$ $\quad \tau_n = \inf\{t \geq 0 : W_t \in [n, +\infty)\}$

ora 42

W ha traiettorie continue (!) è adattato e $[n, +\infty)$ è chiuso

$\Rightarrow \tau_n$ è t.d.a.

2) $Y^{(n)} := X \mathbb{1}_{[0, \tau_n)}$ cont a DX + adattato $\Rightarrow$ progr. mis.

progr. mis.

fisso $t \geq 0$, $\|Y^{(n)}\|^2_{M^2_{0,t}} = E\int_0^t (Y_s^{(n)})^2 ds = E\int_0^t X_s^2 \mathbb{1}_{[0,\tau_n)}(s)\, ds$

$$= E\int_0^{\tau_n \wedge t} X_s^2\, ds = E\, W_t^{\tau_n} \leq n$$

vero perché $\int \ldots ds$ è definito "pathwise" ($=$ per ogni ω)

3) Fisso $T>0$ $\forall n \geq 1$ $\forall m \geq n$

$$Y_t^{(m)}(\omega) = Y_t^{(n)}(\omega) = X_t(\omega) \qquad \omega \in \{\tau_n \geq T\} \quad t \in [0,T]$$

applico il thm di localizzazione

$$M_t^{(m)}(\omega) = M_t^{(n)}(\omega) \qquad \text{q.o. } \omega \in \{\tau_n \geq T\} \quad t \in [0,T]$$

Gli eventi $\{\tau_n \geq T\} \nearrow A_T := \bigcup_{n \geq 1} \{\tau_n \geq T\}$

A_T è di probabilità 1 (se $\omega \notin A_T \Rightarrow \forall n,\ \tau_n(\omega) < T \Rightarrow W_T = +\infty$)

$\mathcal{M}^2_{loc} \Rightarrow W_T < \infty$ q.c.

$\Rightarrow M^{(m)}$ è definitivamente costante q.o. ω $\quad t \in [0,T]$

$\Rightarrow$ (intersezione su T) $M^{(m)}$ è def$^{\text{ente}}$ cost. q.o. ω $\quad t \geq 0$

4) ovvio: q.o. ω $M_\cdot = M_\cdot^{(m)}$ per m grande

continua

5) Nel 3): $Y_t^{(m)}(\omega) = X_t^{(m)}(\omega) \Rightarrow M_t^{(m)}(\omega) = I_t(X)(\omega)$

$\mathcal{M}^2$

$\omega \in \{\tau_n \geq T\},\ t \in [0,T]$

faccio il limite : $\tilde{I}(X) = \text{q.c.-}\lim_{m\to\infty} M^{(m)} = X(X)$

☆ W_t continua : $W_t = \int_0^t X_s^2 ds$ monotona

$W_t \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} W_{t_n}$ $\quad t_n \searrow t \quad W_{t_n} \geq W_t \quad \inf_n W_{t_n} \geq W_t$

RPA. Se W_t non è continua per ω allora $\exists t, \varepsilon>0$ t.c.

$\inf_{s>t} W_s \geq W_t + \varepsilon \quad \Rightarrow \int_t^s X_u^2 du \geq \varepsilon \quad \forall s>t$

$X_u^2 \in L^1([0,T], \mathcal{B}, Leb) \qquad \int_0^T X_u^2 du < \infty$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 : A \in \mathcal{B} \quad Leb(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A X_u^2 du < \varepsilon$ assurdo

6) $H = \{W_t \leq c\} = \{\tau_c \geq t\} \qquad \tau_c = \inf\{u \geq 0, W_u \geq c\}$

$\omega \in H = \{\tau_c \geq t\} \quad \forall m \geq c \quad Y_s^{(m)}(\omega) = X_s(\omega) = X_s(\omega)\mathbb{1}_H(\omega) \quad s \in [0,t]$

su H $\forall m \geq c$ $\quad Y^{(m)} = X = X\mathbb{1}_H \Rightarrow M^{(m)}$ def ente cost $= \tilde{I}(X)$
su H^c $\forall m \geq c$ $\quad 0 = X\mathbb{1}_H \Rightarrow \qquad = 0$

faccio il limite q.o.-ω $\quad \tilde{I}(X)\mathbb{1}_H = ?$

$\tilde{Y}_s^{(m)}(\omega) = X\mathbb{1}_H(\omega)\mathbb{1}_{[0,\tau_m^{\omega}]}(s)$

$\tilde{Y}_s^{(m)}(\omega) = \tilde{Y}_s^{(n)}(\omega) = X_s(\omega)\mathbb{1}_H(\omega) \quad \omega \in \{\tau_n \geq T\} \quad m \geq n \quad s \in [0,T]$

$\tilde{M}_s^{(m)}(\omega) = \tilde{M}_s^{(n)}(\omega) \qquad$ " $\quad$ " $\quad$ "

$\tilde{M}^{(m)} \to \tilde{I}(X\mathbb{1}_H) \quad$ su $\{\tau_n \geq T\}$
$\tilde{M}^{(m)} \to \tilde{I}(X\mathbb{1}_H) \quad$ su $H = \{\tau_c \geq t\} \qquad s \in [0,t]$

su H $\quad \tilde{Y}_s^{(m)}(\omega) = Y_s^{(m)}(\omega) \quad m \geq c \quad s \in [0,t]$

$\tilde{I}(X)\mathbb{1}_H = \tilde{I}(X\mathbb{1}_H)$ su H $\quad s \in [0,t]$
(anche su H^c)

Proprietà e non dell'int. stoc. per processi $\mathcal{M}^2_{loc}$

★ L'int. stoc. di processi $\mathcal{M}^2_{loc}$

→ non è una mg

→ non ha componenti L^2 o L^1

$\boxed{\text{è lineare}}$

★ Vale $\displaystyle\int_a^c X_s\,dB_s = \int_a^b X_s\,dB_s + \int_b^c X_s\,dB_s$

★ Vale $\displaystyle\int_0^\tau X_s\,dB_s = \int_0^t X_s\,\mathbb{1}_{[0,\tau)}(s)\,dB_s$ se $\tau \le C$ q.c.

NO DIM

★ Non vale l'isometria di Itô

$M^2 \xrightarrow{I} L^2$ lineare iso di Itô → continuo

$\mathcal{M}^2_{loc} \xrightarrow{\tilde I} ?$ operatore lineare continuo nelle topologie giuste

● **Thm** $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\ge0}, \mathcal{F}, P)$ B un BM

$(X^{(n)})_{n\ge1}$ $X^{(n)} \in \mathcal{M}^2_{loc}$ $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$ $t>0$

Se $X^{(n)} \to X$ in probabilità nella norma $L^2(0,t)$

Allora $\tilde I(X^{(n)}) \longrightarrow \tilde I(X)$ in probabilità nella norma del sup di $[0,t]$

Dim $$P\left(\sup_{[0,t]} \left|\tilde I_s(X^{(n)}) - \tilde I_s(X)\right| > \varepsilon\right) = P\left(\sup_{[0,t]} \left|\tilde I_s(X^{(n)} - X)\right| > \varepsilon\right)$$

$$= P\Bigg(\sup_{[0,t]} \left|\tilde I_s(X^{(n)}-X)\right| > \varepsilon,\ \underbrace{\int_0^t Z_s^2\,ds \le \delta}_{H \quad \delta)\ \text{thm}}\Bigg) + P\Bigg(\sup_{[0,t]} \left|\tilde I_s(X^{(n)}-X)\right| > \varepsilon,\ \underbrace{\int_0^t Z_s^2\,ds > \delta}_{\text{piccolo}}\Bigg)$$

$Z = X^{(n)} - X$

$$\le P\Bigg(\sup_{[0,t]} \Big|\tilde I_s\big(\underbrace{(X^{(n)}-X)\mathbb{1}_H}_{\in M^2_{0,t}}\big)\Big| > \varepsilon\Bigg) + P(H^c)$$

$$= P\left(\sup_{[0,t]} \left(I_s\left((X^{(n)}-X)\mathbb{1}_H\right)\right)^2 > \varepsilon^2\right) + P(H^c)$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left(I_t\left((X^{(n)}-X)\mathbb{1}_H\right)\right)^2 + P(H^c)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} E\Big[\underbrace{\int_0^t (X_s^{(n)}-X_s)^2 ds\, \mathbb{1}_H}_{\int_0^t Z_s^2 ds \leq \delta \text{ su } H}\Big] + P(H^c) \leq \frac{\delta}{\varepsilon^2} + P(H^c)$$

$\forall \eta > 0,\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n : P(H^c) < \frac{1}{2}\eta \quad \exists \delta > 0 : \frac{\delta}{\varepsilon^2} < \frac{1}{2}\eta$

$P\left(\| \tilde{I}(X^{(n)}) - \tilde{I}(X)\|_{\sup} > \varepsilon\right) < \eta$ $\square$

Punto della situazione

- noise → moto Browniano
- integrazione stocastica $\int_0^T X_t \, dB_t$ → integrale di Itô, processi M^2_{loc}
- derivazione ...

$$\frac{d}{dt} x_t = f(x_t) + g(x_t)\,\xi_t$$

white noise → distribuzione

$$dx_t = f(x_t)dt + g(x_t)\underbrace{dB_t}_{\xi_t dt}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(x_s)ds + \int_0^t g(x_s)\,dB_s$$ definito ok

- Notazione differenziale

artificio per scrivere equazioni integrali in modo che sembrino differenziali

★ $dX_t = A_t\,dt + C_t\,dB_t \xrightarrow{\text{vuol dire}} \int_0^t dX_s = X_t - X_0 = \int_0^t A_s\,ds + \int_0^t C_s\,dB_s$

★ $dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t$ $\boxed{\text{SDE}}$

vuol dire → $X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s$

- Processi di Itô

Def Il processo X_t si dice di Itô se $\exists\, Y \in M^1_{loc}$ e $Z \in M^2_{loc}$:

$$dX_t = Y_t\,dt + Z_t\,dB_t$$

$$X_t = X_0 + \underbrace{\int_0^t Y_s\,ds}_{\text{processo BV}} + \underbrace{\int_0^t Z_s\,dB_s}_{\text{mg locale continua}}$$

def ovvia

condizione minima per dare senso a $\int_0^t Y_s\,ds$

W_t è mg local se $\exists\, \tau_n \nearrow \infty$: $W_t^{\tau_n}$ è mg L^2

★ C'è una caratterizzazione: se X è di Itō, Y e Z sono essenzialmente unici

★ L'integrale stocastico si generalizza ad integratori di Itō

$$\int_0^t \underbrace{U_s dX_s}_{\text{processo di Itō}} := \int_0^t \underbrace{U_s Y_s}_{U\cdot Y \in M^1_{loc}} ds + \int_0^t \underbrace{U_s Z_s}_{U\cdot Z \in M^2_{loc}} dB_s$$

→ si generalizza poco di più: integratori che sono semimartingale

• Variazione quadratica

$\langle B \rangle_t = t$ v.q. del moto Browniano

$$\langle X \rangle_t = P\text{-}\lim_{\substack{|\delta| \to 0 \\ \delta \in \Delta_{[0,t]}}} \sum_{i=1}^{N} \left(X_{\delta_i} - X_{\delta_{i-1}} \right)^2$$

monotona non decr., nulla in $t=0$, continua (se lo è X), adattata

★ X mg continua L^2 $\Rightarrow$ $\exists! \, (A_t)_{t \geq 0}$ cont, adatt, non decr, $A_0 = 0$ tale che $X_t^2 - A_t$ sia una martingala

esso coincide con la variazione quadratica $A_t = \langle X \rangle_t$

↳ $B_t^2 - t$ era una martingala

↳ $\left(\int_0^t X_t dB_t \right)^2 - \int_0^t X_s^2 ds$ era una martingala

★ $dY_t = X_t dB_t$ $\quad X \in M^2_{loc}$ $\quad \Rightarrow d\langle Y \rangle_t = X_t^2 d_t$

★ Se X è un processo di Itō $dX_t = Y_t dt + Z_t dB_t$ $\quad Z \in M^2_{loc}$

Allora $\boxed{\langle X \rangle_t = \int_0^t Z_s^2 ds}$ (si dimostra per $Z \in M^2$ ed è def $\forall$)

CHAIN RULE : FORMULA DI ITÔ

Chain rule classica

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = f'(g(t))g'(t) \qquad g(t) = g_t$$

$$df(g_t) = f'(g_t)g_t' \, dt$$
$$= f'(g_t)\,dg_t \qquad \int_0^t g_s' \, ds = g_t - g_0 = \int_0^t dg_s$$

Cosa succede se g_t è B_t

$$df(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t)\,dt$$

primo esempio formula di Itô

$\boxed{\text{ord } 44}$

→ Esempio : $f(x) = x^2$

$$d(B_t)^2 = df(B_t) = 2B_t dt + dt$$
$$B_t^2 = B_0^2 + 2\int_0^t B_s \, ds + t$$
$$\int_0^t B_s \, ds = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t$$

● Formula di Itô generale

$(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ $\quad B$ un BM $\quad X$ un processo di Itô $dX_t = Y_t dt + Z_t dB_t$

$\varphi = \varphi(t,x) \qquad \varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \varphi \in C^{1,2}$

Allora :

$$d\varphi(t, X_t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t, X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t, X_t)\,d\langle X\rangle_t$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial\varphi}{\partial x} Y_t dt + \frac{\partial\varphi}{\partial x} Z_t dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} Z_t^2 dt$$

$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} Y_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} Z_t^2\right)dt + \frac{\partial\varphi}{\partial x} Z_t dB_t$$

- Formula di Itō multidimensionale

Serve se $\varphi = \varphi(X_t, Y_t)$ ad esempio

Stesse ipotesi ... $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

X processo di Itō d-dimensionale $\quad d\vec{X}_t = \vec{Y}_t\, dt + \boxed{M_t}\, d\vec{B}_t$

dim d $\quad$ matrice $d \times k$ $\quad$ dim k

k BM indipendenti

$$d\varphi(t, X_t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \nabla\varphi \cdot dX_t + \frac{1}{2}(dX_t)^T \underbrace{H\varphi}_{\text{matrice Hessiana}} (dX_t)$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \nabla\varphi \cdot Y_t\, dt + \nabla\varphi^T M_t\, dB_t + \frac{1}{2} \operatorname{Tr}\left(M_t^T H\varphi M_t\right) dt$$

$$\star \quad d\varphi(\underset{d\text{-dim}}{B_t}) = \nabla\varphi \cdot dB_t + \frac{1}{2}\Delta\varphi\, dt \qquad \text{Calcolo } E\left(\int_0^t \dots\right)$$

$M_t = Id$

$$E\varphi(B_t) - \varphi(0) = \frac{1}{2}\int_0^t E\Delta\varphi(B_s)\, ds$$

- Sketch dim formula di Itō semplice

$(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{F}, P)$ $\quad B$ un BM $\quad \varphi \in C^2$

$$d\varphi(B_t) = \varphi'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}\varphi''(B_t)dt$$

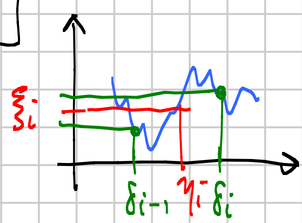
Dim $\quad t \geq 0$ fissato $\quad \delta^{(n)} \in \Delta_{[0,t]} \quad n \geq 1 \quad |\delta^{(n)}| \to 0$

$\forall \delta \in \Delta_{[0,t]}$

$$\varphi(B_t) - \varphi(B_0) = \sum_{i=1}^N \left[\varphi(B_{\delta_i}) - \varphi(B_{\delta_{i-1}})\right]$$

$$= \sum_{i=1}^N \left[\varphi'(B_{\delta_{i-1}})(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) + \frac{1}{2}\varphi''(\xi_i)(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2\right]$$

pto $\xi_i \in [B_{\delta_{i-1}}; B_{\delta_i}]$



$\exists\, \eta_i \in [\delta_{i-1}; \delta_i] \ : \ B_{\eta_i} = \xi_i$

Divido la somma in tre pezzi e faccio i limiti separatamente

① $$\sum_{i=1}^{N} \varphi'(B_{\delta_{i-1}})(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \int_0^t \varphi'(B_s)\,dB_s$$

② $$\sum_{i=1}^{N} \left(\varphi''(B_{\eta_i}) - \varphi''(B_{\delta_{i-1}})\right)(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

③ $$\sum_{i=1}^{N} \varphi''(B_{\delta_{i-1}})(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} \int_0^t \varphi''(B_s)\,ds$$

Dim 1 $\quad \varphi'(B_t)$ è $\mathcal{M}^2_{loc}$, non $\mathcal{M}^2$. Uso la continuità di $\tilde{I}$

$$\tilde{I}(X^{(n)}) = \sum_{i=1}^{N} \varphi'(B_{\delta_{i-1}})(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) \qquad X_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{N} \varphi'(B_{\delta_{i-1}})\mathbb{1}_{[\delta_{i-1};\delta_i)}(t)$$

$$\tilde{I}(X) = \int_0^t \varphi'(B_s)\,dB_s \qquad X_t = \varphi'(B_t) \in \mathcal{M}^2_{loc} \quad \text{ok}$$

Devo verificare che $X^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{P,\,L^2(0,t)} X$

$$\|X^{(n)} - X\|^2_{L^2(0,t)} = \int_0^t (X_s^{(n)} - X_s)^2\,ds = \sum_{i=1}^{N} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} (\varphi'(B_{\delta_{i-1}}) - \varphi'(B_s))^2\,ds$$

$X_t = \sum_i \varphi'(B_s)\mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i]}(t)$

$\varphi' \circ B_\cdot$ è continua $\Rightarrow$ unif. continua (dipende da ω)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \theta > 0 : |s-u| < \theta \Rightarrow |\varphi'(B_s) - \varphi'(B_u)| < \varepsilon$

dip da ω

Allora $\exists\, n_0(\omega) : n \geq n_0 \Rightarrow |\delta^{(n)}| \leq \theta(\omega) \Rightarrow \|X^{(n)} - X\|^2_{L^2(0,t)} \leq t\varepsilon^2$

Ho dimostrato $\forall \varepsilon > 0$ q.o. ω $\limsup_n \|X^{(n)} - X\|_{L^2(0,t)} \leq \varepsilon\sqrt{t} \Rightarrow$ converge q.c.

RESTO DIM $\rightarrow$ NO

EQUAZIONI DIFFERENZIALI STOCASTICHE (SDE)

$$\boxed{\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dB_t \\ X_0 = x \end{cases}}$$

forma tipica

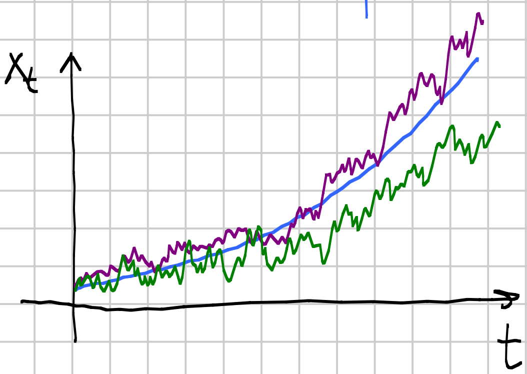
↳ Come condizione iniziale x va bene anche una variabile aleatoria
↳ Scritta così è in $\mathbb{R}$, ma si fa anche in $\mathbb{R}^d$

- Esempio 1:

$$b(t,x) = bx \qquad \sigma(t,x) = \sigma x$$

$$\underbrace{dX_t = bX_t\,dt}_{b>0 \text{ crescita esponenziale}} + \sigma X_t\,dB_t$$

noise moltiplicativo
↳ oscillazione proporzionale
→ "in percentuale"



modellino elementare per
→ dinamiche di popolazione
→ valore titolo azionario
(b = rendimento medio)

★ Cerco una soluzione

se $\sigma = 0$ $\quad u_t = u_0 e^{bt}$ soluzione deterministica

$\log u_t = bt + \log u_0$ è una retta

→ Magari $\log(X_t)$ è semplice?

$$d\log(X_t) = \frac{1}{X_t}\,dX_t - \frac{1}{2}\frac{1}{X_t^2}\,d\langle X\rangle_t = b\,dt + \sigma\,dB_t - \frac{1}{2}\sigma^2\,dt$$

Formula di Itō

$d\langle X\rangle_t = \sigma^2 X_t^2\,dt$

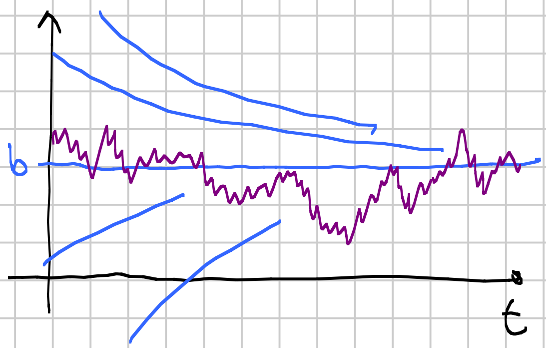
$$\log(X_t) - \log(X_0) = \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t$$

$$\boxed{X_t = X_0 \, e^{\left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t}}$$

Moto Browniano geometrico

- Esempio 2

Vogliamo modellare un processo stocastico che oscilli restando vicino ad un valore tipico b (inflazione ?)



$$u_t' = \lambda(b - u_t)$$

$$dX_t = \lambda(b - X_t)\,dt + \sigma\, dB_t$$

Processo di Orstein - Uhlenbeck

Formula di variazione delle costanti

$$y_t' = -\lambda y_t + f(t)$$

$$y_t = y_0 e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} f(s)\,ds$$

$$\overset{!}{=} e^{-\lambda t}\left(y_0 + \int_0^t e^{\lambda s} f(s)\,ds\right) \leftarrow y_t' = -\lambda y_t + e^{-\lambda t} e^{\lambda t} f(t)$$

$$dX_t = -\lambda X_t\,dt \underbrace{+ \lambda b\,dt + \sigma\,dB_t}_{f(t)dt}$$

$$\boxed{Y_t := X_0 e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \lambda b\,ds + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \sigma\,dB_s}$$

$$dY_t = d\Big[\underbrace{e^{-\lambda t} W_t}_{\varphi(t, W_t)}\Big] = -\lambda Y_t\,dt + e^{-\lambda t} dW_t + \underset{\varphi_{xx}}{0} = \lambda(b - Y_t)\,dt + \sigma\,dB_t$$

$$\varphi(t, x) = e^{-\lambda t} x$$

$$dW_t = e^{\lambda t} \lambda b\,dt + e^{\lambda t} \sigma\,dB_t$$

- Soluzioni forti e deboli

- Se trovo una soluzione che posso costruire a partire da un qualunque BM è una soluzione forte
- Se per costruire una soluzione sono costretto a identificare prima il processo X_t e poi trovare in funzione di X_t un BM particolare che permetta di risolvere la SDE è una soluzione debole

$$dX_t = \operatorname{sgn}(X_t)\, dB_t \quad \leftarrow$$ questa non può avere sol. forti

ora 46

★ **Def** Una soluzione debole è una sestupla $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P, B, X)$ che soddisfa il problema

★ **Def** Una soluzione forte è una soluz. debole per cui X è adattato alla filtrazione naturale di B

↳ Un problema ammette soluzione forte se per ogni scelta di $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P, B)$, esiste X che soddisfa

★ **Def** Si dice che c'è unicità pathwise se, ogni volta che X e X' sono soluzioni con lo stesso $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P, B)$, allora X e X' sono indistinguibili

★ **Def** Si dice che c'è unicità in legge se, ogni volta che X e X' sono soluzioni deboli, allora X e X' hanno le stesse leggi finito-dim.

THM DI ESISTENZA E UNICITÀ (BUONA POSIZIONE)

$T \geq 0$, $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$
$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to M_{d,k}$ misurabili

i. $|b(t,x)|^2 \leq C(1+|x|^2)$
ii. $|\sigma(t,x)|^2 \leq C(1+|x|^2)$
iii. $|b(t,x)-b(t,y)| \leq C|x-y|$
iv. $|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \leq C|x-y|$

Tesi: Per ogni condizione iniziale $x \in \mathbb{R}^d$ il problema

$$\begin{cases} dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

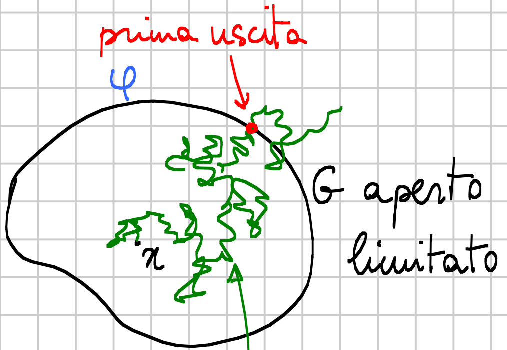
BM k-dimensionale

- ammette una soluzione forte
- vale l'unicità per traiettorie
- $X \in M^2_{0,T}$

— NO DIM —

PROCESSI DI ITO E LAPLACIANO

$\mathbb{R}^d$



$F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \Delta F(x) = 0 & x \in G \\ F(x) = \varphi(x) & x \in \partial G \end{cases}$$

problema di Dirichlet

$B_{t,x} = B_t + x$ $\qquad \tau := \inf\{t \geq 0 : B_{t,x} \in \overline{G}\}$

$B_{\tau,x}$ il punto di uscita

$u(x) = E[\varphi(B_{\tau,x})]$ è soluzione del problema

→ Suppongo che F sia soluzione

$$d\,F(B_{t,x}) = dF(B_t + x) = \nabla F \cdot dB_t + \frac{1}{2}\Delta F\, dt$$

$$F(B_{t,x}) - F(x) = \int_0^t \nabla F(B_{s,x})\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta F(B_{s,x})\, ds$$

$t = t \wedge \tau$

$$F(B^{\tau}_{t,x}) = F(x) + \overbrace{\underbrace{\int_0^t 1_{[0,\tau)}(s) \underbrace{\nabla F(B_{s,x})}_{\text{limitato}} dB_s}_{M^2}}^{\text{martingala}} + \overbrace{\frac{1}{2}\int_0^t 1_{[0,\tau)}(s)\, \underbrace{\Delta F(B_{s,x})}_{=0}\, ds}^{=0}$$

$$E\left(F(B^{\tau}_{t,x})\right) = F(x) \qquad \forall t$$

$\tau < \infty$ q.c. $\quad t \to \infty \quad$ $\boxed{E(\varphi(\underbrace{B_{\tau,x}}_{u(x)})) = F(x)}$

★ Un esempio di SPDE

$n \geq 1 \qquad dX_n = \left(k_{n-1}X_{n-1}^2\, dt - k_n X_n X_{n+1}\, dt\right) + \underbrace{k_{n-1}X_{n-1} \circ dW_{n-1} - k_n X_{n+1} \circ dW_n}_{+k_{n-1}X_{n-1}\, dW_{n-1} - k_n X_{n+1}\, dW_n - \frac{k_{n-1}^2 + k_n^2}{2} X_n\, dt}$

$X_0 \equiv 0 \quad k_0 = 0$

$k_n = \lambda^n \quad \lambda > 1$

$(W_n)_{n \geq 1}$ BM standard

"$\circ\, dW$" integrale di Stratonovich

$X_n(0) = x_n \qquad n \geq 1$

$d X_n^2 = \ldots \qquad X_n^2(t) = \ldots \qquad \overbrace{E X_n^2(t)}^{u_n(t)} = \ldots$

$$u_n' = -(\lambda_n + \mu_n) u_n + \lambda_n u_{n-1} + \mu_n u_{n+1}$$