ANALISI STOCASTICA — ora 1

- lea.unipr.it (sotto fisica e scienze della terra)
  - → pdf (c'è quello del 2012)
  - → avi (TSSC codec)

- Dispense 2012
- Dispense di Caravenna
- D. Williams "Probability with Martingales" (base + martingale)
- P. Baldi "Eq. diff. stocastiche e applicazioni"

SPAZI MISURABILI

$(\Omega, \mathcal{F})$ ← σ-algebra degli eventi $\quad \forall A \in \mathcal{F} \quad A \subseteq \Omega$

Ω: insieme di esiti

- σ-algebra generata da un insieme

$(\Omega, \mathcal{F}) \qquad \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$

$\sigma(\mathcal{H})$ la minima σ-algebra che contiene $\mathcal{H}$

$$\sigma(\mathcal{H}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{G} \supseteq \mathcal{H} \\ \mathcal{G}\ \sigma\text{-alg} \\ \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}}} \mathcal{G}$$

→ un'intersezione qualsiasi di σ-alg è una σ-alg. (check)
→ non è una famiglia vuota (c'è $\mathcal{F}$)
→ è per forza la minima

→ $\mathcal{H} = \{A\} \qquad \sigma(\mathcal{H}) = \{A, A^c, \emptyset, \Omega\}$

→ Se $\mathcal{H}$ è finito allora $\sigma(\mathcal{H})$ è numerabile

Q: Se $\mathcal{H}$ è numerabile? (HW)

- π-system: un insieme di sottoinsiemi di Ω chiuso per intersezioni finite

σ-alg ⇒ π-system ma non viceversa

$(\mathbb{R}, \mathcal{B})$

Boreliani : σ-alg generata dagli intervalli

$\{[a,b] : a<b\} \cup \{\emptyset\}$ è un π-system

- **Thm**: $(\Omega, \mathcal{F})$ $\quad \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ un π-system

  μ, ν due misure su $\sigma(\mathcal{H})$

  Se $\mu = \nu$ su $\mathcal{H}$, allora $\mu = \nu$ su $\sigma(\mathcal{H})$

  (no dim ; Williams A1)

- Variabili aleatorie

  (= funzioni misurabili)

$$(\Omega, \mathcal{F}) \xrightarrow{X} (S, \mathcal{A}) \qquad X^{-1}(A) \in \mathcal{F} \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

→ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua è sempre misurabile rispetto a $\mathcal{B}$

- $(\Omega, \mathcal{F})$ $\quad X$ v.a. $\quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-alg

  X è $\mathcal{G}$-misurabile se $X^{-1}(A) \in \mathcal{G}$ $\forall A \in \mathcal{A}$

- σ-algebra generata da $X : \Omega \to (S, \mathcal{A})$ $\qquad \sigma(X)$

  è la più piccola sotto-σ-alg che rende X misurabile

  v.a

$$\sigma(X) := \sigma\left(X^{-1}(\mathcal{A})\right) := \sigma\left(\{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}\right) = X^{-1}(\mathcal{A})$$

$X^{-1}(\mathcal{A})$ è già una σ-alg (check)

★ X è $\mathcal{G}$-misurabile sse $\sigma(X) \subseteq \mathcal{G}$

- Proposizione : la misurabilità di una v.a. si può controllare su un insieme di generatori

$(\Omega, \mathcal{F})$ $\quad X : \Omega \to S$ $\quad (S, \mathcal{A})$ $\quad \mathcal{A} = \sigma(\mathcal{H})$

$X^{-1}(H) \in \mathcal{F}$ $\forall H \in \mathcal{H}$ allora X è $\mathcal{F}$-misurabile

Dim: $\{A \subseteq S : X^{-1}(A) \in \mathcal{F}\} =: \mathcal{G}$ è automaticamente una σ-alg (check)

$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$

$\mathcal{H} \subseteq \underset{\mathcal{A}}{\underset{\parallel}{\sigma(\mathcal{H})}} \subseteq \mathcal{G}$ $\qquad \boxed{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}}$

$\boxed{\text{ora 2}}$

■ **Lemma di Doob**: Se X, Y sono v.a., Y misurabile rispetto alla σ-alg generata da X allora Y è una funzione deterministica di X

$(\Omega, \mathcal{F})$ $\quad X$ v.a. $(S, \mathcal{A})$ $\quad Y$ v.a. $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$

$\sigma(Y) \subseteq \sigma(X)$

Tesi: $\exists\, f : (S, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ misurabile t.c. $Y = f \circ X$

$$\begin{tikzcd} (\Omega, \sigma(X)) \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "f \circ X = Y"'] & (S, \mathcal{A}) \arrow[r, "f"] & (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \end{tikzcd}$$

Dim $\boxed{\text{I}}$ Mi riduco a Y non-negativa e limitata

g monotona, invertibile, continua

$g : \mathbb{R} \to (0,1)$

$g \circ Y = \tilde{Y} = \tilde{f} \circ X \iff Y = \underbrace{g^{-1} \circ \tilde{f}}_{f} \circ X$

II parte

$\mathcal{R} := \{Y : (\Omega, \sigma(X)) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B})$ limitata$\}$

$\mathcal{H} := \{f \circ X : f : (S, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B})$ limitata$\}$

$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}$ $\quad$ ovvio

$\boxed{\text{II}}$ Per approssimazione con funzioni semplici: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{H}$

a) $\underline{\mathbb{1}_H \in \mathcal{R}}$ $\qquad \mathbb{1}_H : \Omega \to \mathbb{R}_+ \qquad \mathbb{1}_H(\omega) := \begin{cases} 1 & \omega \in H \\ 0 & \omega \notin H \end{cases}$

$\mathbb{1}_H$ è $\sigma(X)$ misurabile sse $H \in \sigma(X)$ (check)

sse $H \in X^{-1}(\mathcal{A})$

sse $\exists A \in \mathcal{A} : H = X^{-1}(A)$

$$\mathbb{1}_H = \mathbb{1}_{X^{-1}(A)} = \begin{cases} 1 & \omega \in X^{-1}(A) \\ 0 & \dots \end{cases} = \begin{cases} 1 & X(\omega) \in A \\ 0 & \dots \end{cases} = \mathbb{1}_A \circ X \in \mathcal{H}$$

b) tutte le funzioni semplici di $\mathcal{Q}$ stanno in $\mathcal{H}$

$$\mathcal{Q} \ni Y = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{H_i} \qquad \mathbb{1}_{H_i} \in \mathcal{Q} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

(HW: è vero che $\sum_{i=1}^n \underset{\uparrow \mathbb{R}}{\alpha_i} \underset{\uparrow \in \mathcal{F}}{\mathbb{1}_{H_i}}$ $\sigma(X)$-misurabile $\Rightarrow H_i \in \sigma(X)$?!)

a) $\Rightarrow \mathbb{1}_{H_i} \in \mathcal{H} \qquad \mathbb{1}_{H_i} = f_i \circ X$

$$Y = \underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i}_{f} \circ X = f \circ X \qquad Y \in \mathcal{H}$$

c) $Y \in \mathcal{Q}$ qualsiasi allora, siccome non-negativa e limitata è limite puntuale monotono di funzioni semplici

$$\left.\begin{array}{l} \exists (Y_n)_{n \geq 1} \quad Y_n \in \mathcal{Q} \quad Y_n \text{ semplice} \\ \forall \omega \in \Omega \quad Y_n(\omega) \nearrow Y(\omega) \end{array}\right\} \text{(check)}$$

b) $\Rightarrow Y_n \in \mathcal{H} \qquad Y_n = f_n \circ X$

è vero che $f_n \nearrow$ qualcosa? NO

$$\boxed{f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq C \quad \forall x \in \mathrm{Im}(X)}$$

$$f_{n+1}(X(\omega)) = Y_{n+1}(\omega) \geq Y_n(\omega) = f_n(X(\omega)) \qquad \forall \omega \in \Omega$$

$$f_n(X(\omega)) = Y_n(\omega) \leq Y(\omega) \underset{\uparrow\, Y \text{ limitata}}{\leq} C \qquad \forall \omega \in \Omega$$

$$f(x) := \limsup_{n \to \infty} f_n(x) \wedge C \qquad \forall x \in S$$

$f : S \to [0, c]$ è misurabile

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in \mathrm{Im}(x)$

$Y(\omega) = \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = \lim_{n} f_n(X(\omega)) = f(X(\omega)) = f\circ X(\omega)$

$Y \in \mathcal{H}$ $\square$

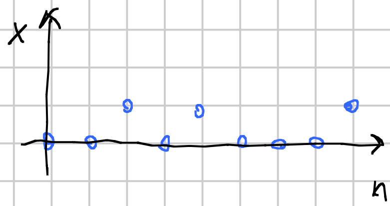
PROCESSI STOCASTICI

$(\Omega, \mathcal{F})$ $\quad (X_i)_{i\in I}$ v.a. $\quad (S, \mathcal{A})$ $\quad I$ un insieme di indici

→ esempio 1 : $I = \mathbb{N}$ $\quad (S, \mathcal{A}) = (\{0,1\}, \dots)$ $\quad p \in (0,1)$

$(X_n)_{n\geq 1}$ $\quad X_n = 1$ con prob. p
$\quad = 0$ con prob. $1-p$

tutte indipendenti

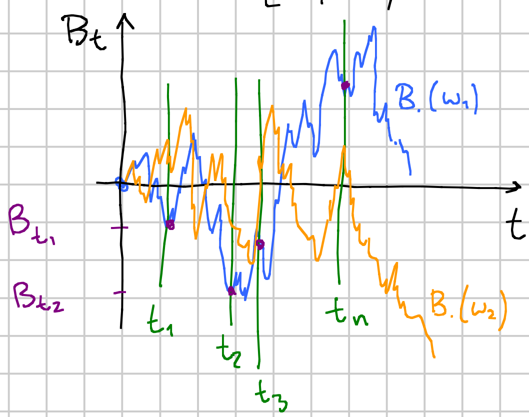


0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1 0 1 ....
↑ ↑
X_1 X_2 ...

Processo di Bernoulli di parametro p

→ esempio 2 : MOTO BROWNIANO (euristico)

$I = [0, \infty)$ $\quad (B_t)_{t\geq 0}$



1) $B_0 = 0$ q.c.

2) $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ $\quad (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})_i$ indip.

3) $B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i)$

4) $B.(\omega)$ è continua per q.o. ω

$B.(\omega) = f : t \mapsto B_t(\omega)$

$[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

ANALISI STOCASTICA ora 3

Note Title 11/10/2013

- Misurabilità dei processi stocastici

$(\Omega, \mathcal{F})$ $X = (X_i)_{i \in I}$ v.a. $(S, \mathcal{A})$

$X : \Omega \to S^I := \{ s : I \to S \}$ insieme delle funzioni, così non occorre I ordinato né I numerabile

$\to \forall i$ X_i è $\mathcal{F}$-misurabile

$\to$ X è $\mathcal{F}$-misurabile

ad esempio se $I = \{1, 2\}$

$X = (X_1, X_2)$ vettore aleatorio X_1, X_2 v.a. $(\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$

X v.a. $(\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$

★ Qual è la σ-alg associata a S^I? La σ-alg prodotto

$(S_1, \mathcal{A}_1)$ $(S_2, \mathcal{A}_2)$ $(S_1 \times S_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$

$(S_i, \mathcal{A}_i)_{i \geq 1}$ $S^{\mathbb{N}} = \prod_{i \geq 1} S_i$ $\bigotimes_{i \geq 1} \mathcal{A}_i$

$(S^I, \mathcal{A}^{\otimes I}) =: (\mathbb{X}, \mathcal{G})$

<u>def</u>: $\mathcal{G}$ è la σ-alg generata dagli insiemi cilindrici ovvero la minima che rende misurabili le proiezioni canoniche $\left(\mathbb{X} = S^I \longrightarrow S \ , \ \pi_i(s) = s_i = s(i) \right)$

★ X è $\mathcal{F}$-misurabile se $\forall G \in \mathcal{G}$ $X^{-1}(G) \in \mathcal{F}$

ovvero se $\forall C$ "cilindrico" $X^{-1}(C) \in \mathcal{F}$

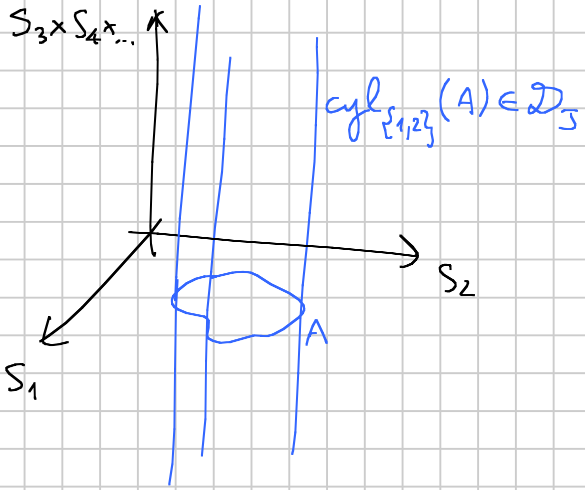
- Sugli insiemi cilindrici $(\mathbb{X}, \mathcal{G}) = (S^I, \mathcal{A}^{\otimes I})$

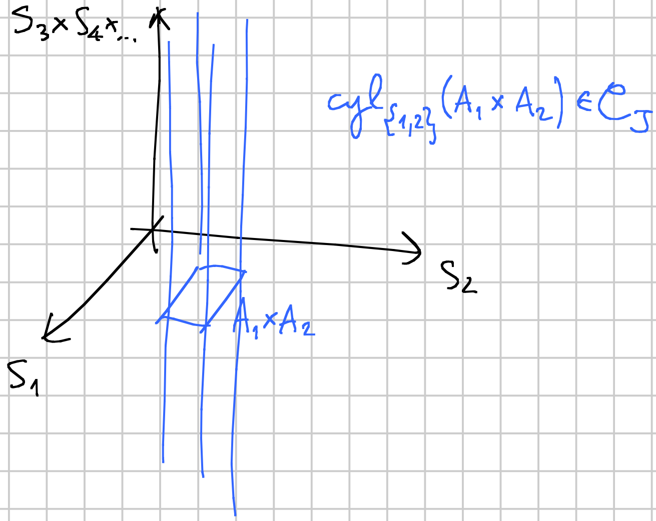
$\forall J \subseteq I$ $|J| < \infty$ insieme finito di coordinate

$\forall A \subseteq S^J$

$cyl_J(A) := \{ x \in \mathbb{X} : x|_J \in A \}$

restrizione, ovvero $(x_j)_{j \in J} \in A$





$\forall J \subseteq I \quad |J| < I$

$$\mathcal{C}_J := \left\{ cyl_J\left(\prod_{j\in J} A_j\right) : A_j \in \mathcal{A} \ \forall j \in J \right\}$$

$$\mathcal{D}_J := \left\{ cyl_J(A) : A \in \mathcal{A}^{\otimes J} \right\}$$

$$\overset{\pi\text{-system}}{\mathcal{C}_J} \subseteq \overset{\sigma\text{-alg}}{\mathcal{D}_J} = \sigma(\mathcal{C}_J)$$

$$\mathcal{G} = \sigma\Big(\underbrace{\bigcup_{\substack{J\subseteq I\\ |J|<\infty}} \mathcal{C}_J}_{\mathcal{C}}\Big) = \sigma\Big(\underbrace{\bigcup_{\substack{J\subseteq I\\ |J|<\infty}} \mathcal{D}_J}_{\mathcal{D}}\Big)$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc}
\overset{\pi\text{-sys}}{\mathcal{C}_J} & \subseteq & \overset{\sigma\text{-alg}}{\mathcal{D}_J} & & \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \cup_J} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \cup_J} & & \\
\underset{\pi\text{-sys}}{\mathcal{C}} & \subseteq & \underset{\text{alg}}{\mathcal{D}} & \subseteq & \underset{\sigma\text{-alg}}{\mathcal{G}}
\end{array}}$$

- i due tipi di misurabilità coincidono

$\Downarrow$ $\quad X_i$ misurabili $\Rightarrow$ X misurabile $\quad X^{-1}(C) \in \mathcal{F} \quad \forall C \in \mathcal{C}$

$\forall J \subseteq I \quad |J| < I \quad \forall C \in \mathcal{C}_J \quad C = cyl_J\left(\prod_{j\in J} A_j\right) \quad A_j \in \mathcal{A}$

$$X^{-1}(C) = X^{-1}\left(cyl_J\left(\prod_j A_j\right)\right) = \left\{\omega \in \Omega : X(\omega)\big|_J \in \prod_j A_j \right\}$$

$$= \left\{\omega \in \Omega : X_j(\omega) \in A_j \ \ \forall j \in J\right\} = \bigcap_{j\in J} \left\{\omega\in\Omega : X_j(\omega) \in A_j\right\} = \bigcap_{j\in J} \underset{\in \mathcal{F}}{X_j^{-1}(A_j)}$$

⇑ (check)

- $\sigma(X)$ è la minima che rende misurabili tutte le coordinate.

- Aggiunge P

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\qquad P : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \qquad P(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{F} \quad P(\Omega) = 1$

σ-additività $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

A_i due a due disgiunti

$\to P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) =: P(X \in B)$ notazione

$P(X \geq 1, Y < 2) = P(\{X \geq 1\} \cap \{Y < 2\})$

- Legge di una v.a.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad X$ v.a. $(S, \mathcal{A})$

X definisce una misura di probabilità $\mathcal{L}_X$ su $(S, \mathcal{A})$ detta la legge di X $\qquad \mathcal{L}_X : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$

$\forall A \in \mathcal{A} \qquad \mathcal{L}_X(A) := P(X \in A)$ $\qquad$ (check : $\{X \in A\} \in \mathcal{F}$)

$\to$ esempio 1 $\quad X$ v.a. di Bernoulli di parametro $p \in (0,1)$

$X = \mathbb{1}_H$ $\quad$ per qualche $H \in \mathcal{F}$ $\quad P(H) = p$

$\mathcal{L}_X = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$

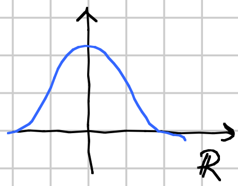
"delta di Dirac" sono misure

$\to$ esempio 2 $\quad Z$ v.a. normale standard

★ <u>non</u> la definisco su Ω ma tramite la legge

<u>def</u> $\quad Z : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ è normale standard se

$$\forall B \in \mathcal{B} \qquad P(Z \in B) = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \, dx =: \mathcal{L}_Z(B)$$



→ esempio 3 $\quad X$ v.a. su $\mathbb{R}^d$, $\mu \in \mathbb{R}^d$,

$Q \in M_d$ simmetrica e definita positiva

def X è normale di media μ e matrice di covarianza Q se $\mathcal{L}_X$ è così definita:

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{L}_X(B) = \int_B (2\pi)^{-d/2} (\det Q)^{-1/2} \exp\{(x-\mu)^T Q^{-1} (x-\mu)\}\, dx$$

- Proposizione : X, Y due processi stocastici a valori in $(\mathbb{X}, \mathcal{G})$

$\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_Y$ sse coincidono le leggi finito-dimensionali

★ X processo stocastico a valori in $\mathbb{X}$

→ $i \in I \quad \pi_i : \mathbb{X} \to S$ proiezione canonica

$\pi_i \circ X = X_i \qquad \mathcal{L}_{X_i}$ legge su $(S, \mathcal{A})$

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) \xrightarrow{X} (\mathbb{X}, \mathcal{G}, \mathcal{L}_X) \xrightarrow{\pi_i} (S, \mathcal{A}, \mathcal{L}_{X_i})$$

legge marginale : legge di una componente

→ $J \subseteq I \quad |J| < \infty \qquad \pi_J : \mathbb{X} \to S^J$ restrizione a J

$\pi_J \circ X = X^J \qquad \mathcal{L}_J$ legge su $(S^J, \mathcal{A}^{\otimes J})$

$A \in \mathcal{A}^{\otimes J} \qquad \mathcal{L}_J(A) := \mathcal{L}_X(\pi_J \in A) := P(X^J \in A)$

$$\{x \in \mathbb{X} : \pi_J(x) \in A\} = \underbrace{\{x \in \mathbb{X} : x|_J \in A\}}_{=: cyl_J(A)}$$

$\forall A \in \mathcal{A}^{\otimes J} \quad \mathcal{L}_J(A) = \mathcal{L}_X(cyl_J(A))$

★ Dire che le proiezioni finito-dimensionali delle leggi di X e Y

coincidono significa dire che
$\forall J \subseteq I \quad |J|<\infty \quad \forall A \in \mathcal{A}^{\otimes J}$

$$\mathcal{L}_X(cyl_J(A)) = \mathcal{L}_{X^J}(A) = \mathcal{L}_{Y^J}(A) = \mathcal{L}_Y(cyl_J(A))$$

equivalentemente $\mathcal{L}_X$ e $\mathcal{L}_Y$ coincidono su $\mathcal{D}$

Dim $\mathcal{D}$ è un π-system e $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{D})$

$\Rightarrow \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_Y$ su tutto $\mathcal{G}$

☆ Indipendentemente dalla cardinalità di I la legge di un processo stocastico è univocamente determinato dalle proiezioni finito-dimensionali

INDIPENDENZA

A, B indipendenti se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ (naive)
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità

- def una famiglia $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ di σ-algebre è indipendente se per ogni scelta di $J \subseteq I \quad |J|<\infty$, $E_j \in \mathcal{F}_j \quad j \in J$

$$P\left(\bigcap_{j \in J} E_j\right) = \prod_{j \in J} P(E_j)$$

- def $(E_i)_{i \in I} \quad E_i \in \mathcal{F}$ è indipendente se sono indipendenti le σ-alg generate $(\sigma(E_i))_{i \in I}$

- def $(X_i)_{i \in I}$ è indipendente se sono indipendenti le σ-alg generate. $(\sigma(X_i))_{i \in I}$

☆ Operativamente: $(X_i)_{i \in I}$ indipendenti se
$\forall J \subseteq I \quad J<\infty \qquad \forall A_j \in \mathcal{A} \quad j \in J$

$$P\left(\bigcap_{j \in J} \{X_j \in A_j\}\right) = \prod_{j \in J} P(X_j \in A_j)$$

☆ L'indipendenza è una scorciatoia per descrivere leggi congiunte

Nel caso del moto Browniano

1) $B_0 = 0$

2) $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})_i$ indipendenti

3) $B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i)$

potrebbero essere sostituite da una descrizione delle leggi finito-dim di $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$

Tutto ciò è equivalente a dare la legge del moto Browniano come processo.

(HW : scrivere la legge di $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ come vettore normale
$\to \mu \quad \to Q$)

Resta da chiarire il ruolo di 4) $B_\cdot(\omega)$ è continua.

☆ In dimensione infinita le leggi finito-dimensionali fissano la legge globale, ma questo non è sufficiente a chiarire ogni aspetto rilevante del processo.

ANALISI STOCASTICA ora 5

Note Title 17/10/2013

- Processi stocastici, indistinguibilità e versioni

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $X = (X_i)_{i \in I}$ processo stocastico

$\forall i \quad X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabili $\longrightarrow \mathcal{L}_i$ leggi marginali

$X : \Omega \to \mathbb{R}^I =: \mathbb{X}$ misurabile $\longrightarrow \mathcal{L}_X$ legge del processo

$I = \mathbb{R}_+$ ma comunque $\mathcal{L}_X$ contiene solo le informazioni "finito-dim"

$\bigstar \ (\mathbb{X}, \mathcal{G}, \mathcal{L}_X)$ $\mathcal{G} := \bigotimes_{i \in I} \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\mathcal{G}$ contiene tutti e soli gli eventi descrivibili con una quantità numerabile di coordinate

- <u>def</u>: X e Y su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sono *indistinguibili* se

  con probabilità 1, $\forall i \in I \quad X_i = Y_i$

  $\exists A \in \mathcal{F}, P(A) = 1 : \forall \omega \in A \ \forall i \in I \quad X_i(\omega) = Y_i(\omega)$

  vedi in fondo ora 6

- <u>def</u>: X e Y su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sono *modificazioni* o *versioni* se

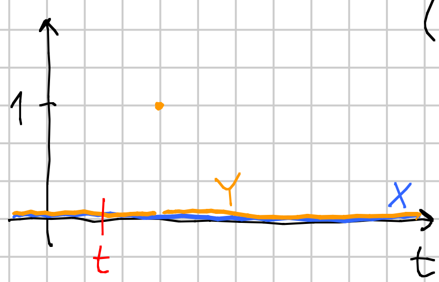
  $\forall i \in I$, con probabilità 1 $\quad X_i = Y_i$

  $\forall i \in I \quad P(X_i = Y_i) = 1$

  $\iff \forall i \in I \ \exists A_i \in \mathcal{F} \ P(A_i) = 1 : \forall \omega \in A_i \ \forall i \in I \quad X_i(\omega) = Y_i(\omega)$

- esempio: $I = \mathbb{R}_+$, $X \equiv 0$, $U \sim \mathrm{unif}[0,1]$ v.a.

  $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ $Y_t = \begin{cases} 1 & t = U \\ 0 & t \neq U \end{cases}$



$\forall \omega \in \Omega \quad X_\cdot(\omega) \neq Y_\cdot(\omega)$

$\forall t \geq 0 \quad P(X_t = Y_t) = 1$

- Se X e Y sono modificazioni allora le loro leggi (finito-dim ma non solo) coincidono

$X = (X_i)_{i\in I}$ X_i a valori in $(S, \mathcal{A})$

$J \subseteq I$ finito $X_J = (X_i)_{i\in J}$ X_J a valori in $(S^J, \mathcal{A}^{\otimes J})$

$\mathcal{L}_X^J(A) := P(X_J \in A)$ $\forall A \in \mathcal{A}^{\otimes J}$

$\mathcal{L}_Y^J(A) := P(Y_J \in A)$

$$P(X_J = Y_J) = P(X_i = Y_i, \forall i \in J) = P\Big(\bigcap_{i\in J}\{X_i = Y_i\}\Big) = 1$$

$H_1, \dots, H_n$ $P(H_i) = 1 \Rightarrow P\Big(\bigcap_{i=1}^n H_i\Big) = 1$ (anche numerabile)

$$\mathcal{L}_X^J(A) = P(X_J \in A) = P(\{X_J \in A\} \cap \{X_J = Y_J\}) = P(\{Y_J \in A\} \cap \dots)$$
$$= P(Y_J \in A) = \mathcal{L}_Y^J(A)$$

★ La legge di un processo lo definisce a meno di modificazioni
Tipicamente si cerca di scegliere una versione comoda (= continua o almeno continua a DX o a SX)

- Se X e Y processi $I: \mathbb{R}_+$, $S = \mathbb{R}$ sono modificazioni continue a DX (o a SX) allora sono indistinguibili

NB. X è cont a DX se $\forall \omega \in \Omega$ $X_\cdot(\omega): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
$X_\cdot(\omega)$ è cont. a DX

★ Tipicamente si descrive un processo con:
1) leggi
2) qualche regolarità traiettorie

DEF. DI MOTO BROWNIANO

$(B_t)_{t\geq 0}$ $\qquad B_t : \Omega \to \mathbb{R}$

1) $B_0 = 0$ q.c.
2) $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ $\quad (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})_i$ indip.
3) $B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i)$

$\Big\}$ legge di B

4) $B_\cdot(\omega)$ è continua per q.o. ω $\Big\}$ regolarità

ESISTENZA MOTO BROWNIANO

I. Thm di estensione di Kolmogorov $\to$ esiste un processo con la legge descritta 1) – 3)

II. Thm di regolarità di Kolmogorov $\to$ "continuità" su un denso numerabile di $\mathbb{R}$

III. $\exists$ una modificazione continua di I.

THM DI ESTENSIONE

(S, d) spazio metrico $\mathcal{A} = \mathcal{B}(S)$

I indici

$\forall J \subseteq I$ finito $\mathcal{L}^J : \mathcal{A}^{\otimes J} \to \mathbb{R}$ $\quad$ misura di prob.

i. regolari

$\forall J \subseteq I$ finito, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall B \in \mathcal{A}^{\otimes J}$

$\exists K \in \mathcal{A}^{\otimes J}$ $\quad K$ compatto $\quad K \subseteq B$ $\quad$ t.c.

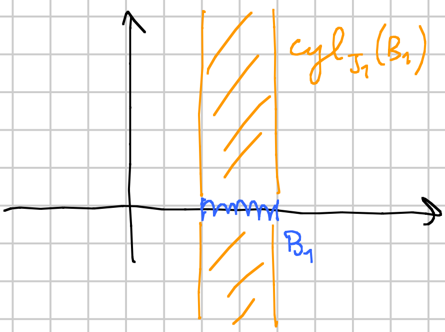
$$\mathcal{L}^J(K) \geq \mathcal{L}^J(B) - \varepsilon$$

ii. tra loro compatibili

$\forall J_1, J_2 \subseteq I$ finiti $\quad \forall B_1 \in \mathcal{A}^{\otimes J_1}, B_2 \in \mathcal{A}^{\otimes J_2}$ $\quad$ t.c.

$$cyl_{J_1}(B_1) = cyl_{J_2}(B_2) \quad \text{allora}$$

$$\mathcal{L}^{J_1}(B_1) = \mathcal{L}^{J_2}(B_2)$$



ora 6

Tesi: $\exists ! \mathcal{L}$ misura di prob su $(\underset{S^I}{\underset{\parallel}{\mathbb{X}}}, \underset{\mathcal{A}^{\otimes I}}{\underset{\parallel}{\mathcal{G}}})$ che estende tutti gli $\mathcal{L}^J$

$$A \in \mathcal{A}^{\otimes J} \quad \mathcal{L}^J(A) = \mathcal{L}(cyl_J(A))$$

Dim: Provo a definire

$$\mathcal{L}(cyl_J(A)) := \mathcal{L}^J(A)$$

è una buona definizione grazie all'ipotesi ii.

$$cyl_J(A) := \{x \in \mathbb{X} : x|_J \in A\}$$

$$\mathcal{D} = \{cyl_J(A) : J \subseteq I \text{ finito } A \in \mathcal{A}^{\otimes J}\}$$

$\mathcal{L}$ è ben definita su $\mathcal{D}$ che è un'algebra

Grazie al thm di Carathéodory posso dimostrare che $\mathcal{L}$ ammette un'estensione (unica) su tutto $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{D})$

$\mathcal{D}$ è un π-sys

1) $\mathcal{L}(\emptyset) = 0$ (check)

2) $\mathcal{L}(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{D}$

3) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathcal{L}(A \cup B) = \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B)$ (?)

$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$

4) $\mathcal{L}$ è continua in zero $\quad A_1, A_2, \dots \in \mathcal{D} \quad A_n \downarrow \emptyset$

$$\underbrace{\text{"} \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(A_n) = \mathcal{L}(\underbrace{\lim_{n\to\infty} A_n}_{\emptyset}) \text{"}}_{0}$$

Devo quindi dimostrare che se $A_n \downarrow \emptyset$ allora $\mathcal{L}(A_n) \to 0$

$$A_n \in \mathcal{D} \qquad A_n = cyl_{J_n}(B_n) \qquad B_n \in \mathcal{A}^{\otimes J_n}$$

$J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots$ è sempre vero?

$$A = cyl_{\{1\}}([0,1]) = cyl_{\{1,2\}}(\underbrace{[0,1]\times\mathbb{R}}_{B})$$

wlog posso supporre $J_n \nearrow$, perché eventualmente aggiungo ricorsivamente le coordinate mancanti

- Caso 1) B_n sono compatti, claim: $\bigcap_{n=1}^{N} A_n = \emptyset$ per qualche N

$$\mathcal{L}(A_n) = \mathcal{L}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = 0 \qquad n \geq N \qquad \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(A_n) = 0$$

dimostro il claim RPA

$$\exists\, x^{(n)} \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_n \qquad n = 1,2,\dots \qquad x^{(n)} \in \mathbb{X}$$

$$\forall k \geq 1 \quad J_k, \quad y^{(n,k)} \in S^{J_k} \qquad y^{(n,k)} := x^{(n)}\big|_{J_k}$$

$$k = 1,2,\dots,n, \quad x^{(n)} \in A_k = cyl_{J_k}(B_k) = \{z \in \mathbb{X} : z|_{J_k} \in B_k\}$$

$$\Rightarrow y^{(n,k)} := x^{(n)}\big|_{J_k} \in B_k \qquad \forall\, k \leq n$$

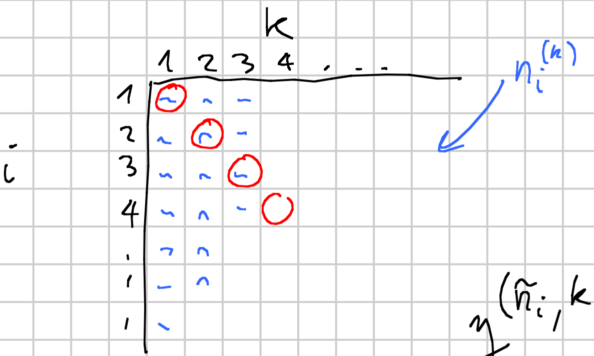
Se fisso k e considero $\underset{?}{y^{(1,k)}}, \underset{?}{y^{(2,k)}}, \dots, \underset{\in B_k}{y^{(k,k)}}, \underset{\in B_k}{y^{(k+1,k)}} \dots$

Siccome B_k è compatto dato una qualunque successione $n_j \nearrow \infty$ $\exists\; n_{j_m} \nearrow \infty$ t.c. $y^{(n_{j_m},k)}$ converge

$k = 1 \quad n_i^{(1)} \quad i = 1,2,\dots$ una successione per cui $y^{(n_i^{(1)},1)} \to y^{(1)}$

$k = 2 \quad n_i^{(2)}$ una sottosucc. di $n_i^{(1)}$ per cui $y^{(n_i^{(2)},2)} \to y^{(2)}$

e così via



$\tilde{n}_k := n_k^{(k)}$ appartiene a $(n_i^{(k)})_i$ definitivamente $\forall k$

$$y^{(\tilde{n}_i,k)} \xrightarrow{i\to\infty} y^{(k)} \qquad \forall k$$

$$j \in J_k \subseteq J_{k+1}, \quad y_j^{(k+1)} = \lim_{i\to\infty} y_j^{(\tilde{n}_i,k+1)} = \lim_{i\to\infty} x_j^{(\tilde{n}_i)} = \lim_{i\to\infty} y_j^{(\tilde{n}_i,k)} = y_j^{(k)} \qquad (*)$$

Sia $x \in \mathbb{X}$ definito da $x_j := \begin{cases} y_j^{(k)} & \text{con } k : j \in J_k \\ 0 & \text{se } j \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \end{cases}$

(*) dice che questa è una buona definizione

$\forall k \geq 1 \qquad x\big|_{J_k} = y^{(k)} \in B_k \iff x \in cyl_{J_k}(B_k) = A_k$

$\Rightarrow x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$ <u>assurdo</u>.

<u>Note</u>: Per alcuni autori: (Revuz - Yor)

- <u>def</u> X e Y sono versioni dello stesso processo se hanno le stesse leggi: possono anche essere definiti su spazi diversi

- Caso 2) B_n non necessariamente compatti

regolarità: $\forall \varepsilon>0 \ \forall B \in S^J \ \exists K \in S^J$ compatto $\mathcal{L}^J(K) \geq \mathcal{L}^J(B)-\varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall n \ K_n \subseteq B_n$ K_n compatto

$$\mathcal{L}(cyl_{J_n}(K_n)) := \mathcal{L}^{J_n}(K_n) \geq \mathcal{L}^{J_n}(B_n) - \varepsilon$$

$$\downarrow$$
$$0$$

$$\mathcal{L}(A_n) := \mathcal{L}^{J_n}(B_n) \leq \mathcal{L}(cyl_{J_n}(K_n)) + \varepsilon$$

$$\limsup_n \mathcal{L}(A_n) \leq 0 + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(A_n) \to 0$$

$\square$

- Posso applicare thm di estensione alla def di BM?

$\mathbb{X} = \mathbb{R}^{[0,\infty)}$ $\quad I = [0,\infty)$ $\quad \mathcal{G} = \mathcal{B}^{\otimes[0,\infty)}$

$J \subseteq I$ finito $\quad J = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ $\quad t_1 < t_2 < \dots < t_n$

$\mathcal{L}^J = ?$ $\quad \mathcal{L}^J(D) \underbrace{:= P((B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}) \in D)}_{\text{virtuale}} :=$ def di BM

+ verifico i. ii. (pensare a come si fa)

→ $\exists!$ $\mathcal{L}$ misura di probabilità su $(\mathbb{X}, \mathcal{G})$ compatibile con le $\mathcal{L}^J$.

→ A questo punto per ottenere il processo faccio così:

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) \quad (B_t)_{t\geq 0} \longrightarrow (\mathbb{X}, \mathcal{G}, \mathcal{L}) \quad (\pi_t)_{t\geq 0}$$

$$\begin{cases} \Omega := \mathbb{X} = \mathbb{R}^{[0,+\infty)} \\ \mathcal{F} := \mathcal{G} \\ P := \mathcal{L} \\ B_t := \pi_t \quad \text{proiezione canonica} \\ \forall \omega \in \Omega \quad B_t(\omega) := \pi_t(\omega) = \omega(t) \end{cases}$$

$\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}$ è una funzione

$$P\big((B_{t_1},\dots,B_{t_n})\in D\big) = P\big(\{x\in\mathbb{X} : x|_J \in D\}\big) = \mathcal{L}(cyl_J(D)) = \mathcal{L}^J(D)$$

$x\in\Omega$

☆ NB Questa definizione <u>NON</u> soddisfa 4) continuità

$$\underbrace{P\big(\{\omega\in\Omega : B_\cdot(\omega) \text{ è continua}\}\big)}_{\text{non sta in } \mathcal{G}} = \text{UNDEF}$$

(non è descrivibile con una quantità numerabile di coordinate)

THM DI REGOLARITÀ

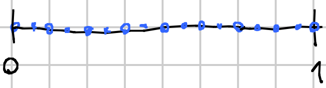
$(\Omega,\mathcal{F},P)$ $\quad X=(X_t)_{t\in[0,1]}$ $\quad X_t$ a valori in $\mathbb{R}$

hp: $\exists\, a>0,\ b>1,\ c>0$ t.c. $\forall s,t\in[0,1]$

$$E\big(|X_t-X_s|^a\big)\le c\,|t-s|^b$$

ts: per q.o. ω $\quad X_\cdot(\omega)$ è α-Hölderiana sui diadici $\forall \alpha<\frac{b-1}{a}$

- Diadici :



$D_n := 2^{-n}\mathbb{Z}\cap[0,1]$ $\qquad D_0=\{0,1\}$ $\qquad D_1=\{0,\frac12,1\},\ \dots$

$D := \bigcup_{n\ge0} D_n$

- Funzioni Hölderiane

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è α-Hölderiana se $\exists c>0 : \forall s,t\in\mathbb{R}$

$$|f(t)-f(s)|\le c\,|t-s|^\alpha$$

è Lipschitziana se è 1-Hölder

$\Downarrow$ è uniformemente continua se $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall s,t\in\mathbb{R}$

$$|t-s|<\delta \Rightarrow |f(t)-f(s)|<\varepsilon$$

↳ è continua se $\forall \varepsilon > 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 : \forall s \in \mathbb{R}$

$$|t-s| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| < \varepsilon$$

★ una funzione uniformemente continua su $I \subseteq \mathbb{R}$ si può estendere con continuità su $\bar{I}$.

$f : D \to \mathbb{R}$ α-Hölderiana $\Rightarrow$ unif. cont. $\Rightarrow \exists \tilde{f} : [0,1] = \bar{D} \to \mathbb{R}$

t.c. $f|_D = \tilde{f}|_D$.

---

ora 8

Dim ingredienti per passare da affermazioni in valore atteso ad affermazioni pathwise

→ disuguaglianza di Markov

X v.a. $X \geq 0$ $\forall a > 0$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

→ Lemma di Borel-Cantelli (I)

$H_1, H_2, \dots \in \mathcal{F}$ t.c. $\sum_{n \geq 1} P(H_n) < \infty$, allora

$$P(\limsup_n H_n) = 0$$

$$\limsup_n H_n := \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq k} H_n = \left\{ \omega \in \Omega : \begin{array}{l} \text{si realizza un} \\ \text{numero infinito} \\ \text{degli } H_n \end{array} \right\}$$

q.c. solo un numero finito degli H_n si verifica

$\Delta_n = \{(p,q) : p,q \in D_n, \ q = p + 2^{-n}\}$ coppie di diadici consecutivi

voglio qualcosa tipo $|X_q - X_p| \leq \delta |q-p|^\alpha = 2^{-\alpha n}$

- Step 1) $n \geq 1$ $(p,q) \in \Delta_n$

$$P(|X_q - X_p| > \delta 2^{-\alpha n}) = P(|X_q - X_p|^a > \delta^a 2^{-\alpha a n}) \qquad \forall a > 0$$

$$\underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{1}{\delta^a} 2^{\alpha a n} E(|X_q - X_p|^a) \underset{\text{ipotesi}}{\leq} \delta^{-a} 2^{\alpha a n} c |q-p|^b = \frac{c}{\delta^a} 2^{(\alpha a - b) n}$$

se α è piccolo $\alpha a - b < 0$ e le "eccezioni" poco probabili

$n \geq 1$
$$P\left(\exists (p,q) \in \Delta_n,\ |X_q - X_p| > \delta |q-p|^\alpha\right)$$
$$= P\left(\bigcup_{(p,q)\in\Delta_n} \{ |X_q - X_p| > \delta |q-p|^\alpha \} \right)$$
$$\leq \underbrace{\sum_{\Delta_n}}_{\#\Delta_n = 2^n - 1} P\left(|X_q - X_p| > \delta |q-p|^\alpha\right) \leq 2^n c \delta^{-a} 2^{(\alpha a - b)n} = c\delta^{-a} 2^{-n(b-1-\alpha a)}$$

se $\alpha < \frac{b-1}{a}$ allora $b-1-\alpha a > 0$ e quindi le prob. qui sopra sono sommabili $\Rightarrow$ applico B.C. I

Per q.o. ω $\quad \exists n_0 = n_0(\omega) : \forall (q,p) \in \Delta_n \quad \forall n \geq n_0$

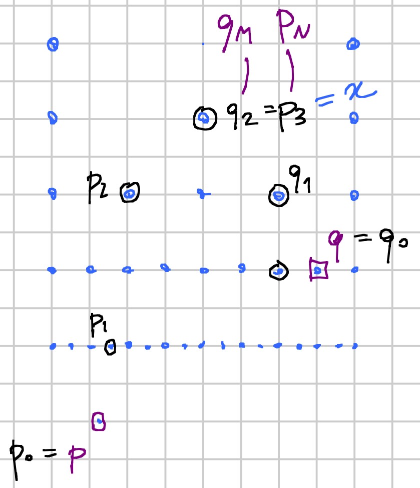
$$|X_q - X_p| \leq \delta |q-p|^\alpha \qquad (*)$$

$\Rightarrow \exists \delta = \delta(\omega) : \forall n \geq 0 \ \forall (q,p) \in \Delta_n$ vale $(*)$

non è un problema

(nell'enunciato non dico che la cost. di Höld è globale)

- Step 2) Consideriamo $p, q \in D$ non per forza consecutivi



$(p_n, p_{n+1}) \in \Delta_{m_n} \qquad m_0 > m_1 > \dots > m_{N-1}$

$$p_N - p_0 = \sum_{n=0}^{N-1} (p_{n+1} - p_n) = \sum_{n=0}^{N-1} 2^{-m_n} \geq 2^{-m_{N-1}}$$

$$|X_p - X_x| = |X_{p_0} - X_{p_N}| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |X_{p_{n+1}} - X_{p_n}| \leq \sum_{n=0}^{N-1} \delta \overbrace{|p_{n+1} - p_n|^\alpha}^{2^{-\alpha m_n}}$$
$$= \delta \left(2^{-m_{N-1}\alpha} + 2^{-m_{N-2}\alpha} + \dots + 2^{-m_0 \alpha}\right) \leq \delta \left(2^{-m_{N-1}\alpha} + 2^{-(m_{N-1}+1)\alpha} + \dots \right)$$
$$= \delta\, 2^{-\alpha m_{N-1}} \cdot \left(1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^\alpha + \left(\tfrac{1}{4}\right)^\alpha + \dots\right) = \frac{1}{1-2^{-\alpha}} \delta\, 2^{-\alpha m_{N-1}} \leq c_\alpha \delta |p - x|^\alpha$$

$$|X_p - X_q| \le |X_p - X_x| + |X_q - X_x| \le c_\alpha \delta \left(|p-x|^\alpha + |q-x|^\alpha\right)$$
$$\le 2 C_\alpha \delta \max(|p-x|, |q-x|)^\alpha \le 2 C_\alpha \delta |p-q|^\alpha$$

Fine: $\alpha < \frac{b-1}{a}$ per q.o. ω $\exists \delta(\omega,\alpha)$: $\forall p,q \in D$

$$|X_q - X_p| \le \delta |q-p|^\alpha$$

$H_\alpha := \{\omega \in \Omega : X.(\omega)$ è α-Höld su $D\}$ $\alpha < \frac{b-1}{a} \Rightarrow P(H_\alpha) = 1$

$0 < \alpha \le \alpha'$, $q, p \in [0,1]$ $|q-p|^\alpha \ge |q-p|^{\alpha'}$

$\Rightarrow H_{\alpha'} \subseteq H_\alpha$ famiglia discendente

☆ maggiore α, maggiore è la regolarità richiesta alle traiettorie (quindi sono di meno)

(think)

$$H := \bigcap_{\substack{\alpha < \frac{b-1}{a} \\ \alpha \in \mathbb{Q}}} H_\alpha = \bigcap_{\alpha < \frac{b-1}{a}} H_\alpha \qquad P(H) = 1 \qquad \square$$

☆ Prossima settimana niente lezioni
(ma seminario di contesto mercoledì 30 16:30–18:30)

→ Sistemato thm di regolarità

• Verifichiamo come si applica al BM

$$E\left[|B_t-B_s|^a\right]=? \qquad s,t\in[0,1] \qquad a>0$$

$a=2n \qquad n\geq 1 \qquad B_t-B_s\sim\mathcal{N}(0,|t-s|)$ per def

$$Z:=\frac{B_t-B_s}{|t-s|^{1/2}}\sim\mathcal{N}(0,1) \qquad f_Z(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$$

$$E(Z^{2n})=\int_{\mathbb{R}}t^{2n}f_Z(t)\,dt=\int_{\mathbb{R}}\underbrace{t^{2n-1}}_{\text{der}}\ \underbrace{t\,e^{-t^2/2}}_{\text{int}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dt$$

$$=\underbrace{\left[-t^{2n-1}f_Z(t)\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0}+\int_{\mathbb{R}}(2n-1)t^{2(n-1)}f_Z(t)\,dt=(2n-1)E\left(Z^{2(n-1)}\right)$$

per induzione : $E(Z^{2n})=(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1=:C_n$

$$E\left(|B_t-B_s|^{2n}\right)=E\left(\left(|t-s|^{1/2}Z\right)^{2n}\right)=C_n|t-s|^n$$

$E\left(|B_t-B_s|^a\right)\leq c|t-s|^b \implies B_\cdot$ è q.c. α-Höld su D $\forall\alpha<\frac{b-1}{a}$

$a=2n \quad b=n \qquad$ BM q.c. è α-Höld su D $\forall\alpha<\frac{n-1}{2n}$

Facendo l'intersezione degli eventi q.c. per $n\to\infty$:

BM q.c. è α-Höld su D $\forall\alpha<\frac{1}{2}$

ESISTENZA DEL BM

$\exists\ (\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad B = (B_t)_{t\geq 0}$: 1) – 3) soddisfatte

q.c. $B_\cdot$ è unif continua su D = diadici di $[0,1]$

Definisco un nuovo processo $W = (W_t)_{t\in[0,1]}$

$$W_t(\omega) := \begin{cases} B_t(\omega) & t\in D \\ \lim\limits_{\substack{s\to t \\ s\in D}} B_s(\omega) & t\notin D \\ 0 & \text{altri } \omega \end{cases} \qquad \omega : B_\cdot(\omega) \text{ unif cont}$$

$W_\cdot(\omega)$ è continua $\forall\omega\in\Omega$ per proprietà delle unif. cont. su D

soddisfa 4) ma soddisfa anche 1) – 3) ?

Basta verificare che W è una modificazione di B

$$\forall t\in[0,1] \qquad B_t \overset{?}{=} W_t \quad \text{q.c.}$$

se $t\in D$ è chiaro dalla def.

se $t\notin D$ faccio così : si ω : $W_t(\omega) = \lim\limits_{\substack{s\to t \\ s\in D}} B_s(\omega)$

$W_t(\cdot)$ è il limite puntuale di $B_s(\cdot)$

$(s_n)_{n\geq 1}$ $\quad s_n\in D \quad s_n \to t$

$$\boxed{B_{s_n} \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} W_t}$$

$$B_{s_n} \xrightarrow{?} B_t$$

$$B_{s_n} - B_t \sim \mathcal{N}(0, |s_n - t|) \Rightarrow E\left[(B_{s_n}-B_t)^2\right] = |s_n - t| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$L^2((\Omega, \mathcal{F}, P); \mathbb{R}) = \{X \text{ v.a. t.c. } E(X^2) = \|X\|_{L^2}^2 < \infty\}$$

$$\boxed{B_{s_n} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} B_t}$$

- **Def** $X_n \xrightarrow{P} X$ in probabilità se

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0$$

★ $X_n \xrightarrow{q.c.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

★ $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

★ $X_n \xrightarrow{P} X$, $X_n \xrightarrow{P} X' \Rightarrow X = X'$ q.c.

★ Quindi $W_t = B_t$ q.c. come volevo dimostrare

(HW: estendere il ragionamento e mostrare che $\exists$ BM per tempi $[0, \infty)$)

ora 10

PROCESSI GAUSSIANI

- **Def** un processo X a valori reali si dice gaussiano se le sue leggi finito-dimensionali sono gaussiane ovvero se $\forall\, t_1, t_2, \dots, t_n \geq 0$ il vettore $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ è un vettore gaussiano

- **Def** un vettore aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)$ si dice gaussiano se $\forall\, a \in \mathbb{R}^n$ $a \cdot X$ è una v.a. gaussiana

★ ovvero se $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{L}_X(B) = \int_B \overbrace{(2\pi)^{-n/2} (\det Q)^{-1/2} \exp\left\{(x-\mu)^T Q^{-1} (x-\mu)\right\}}^{f(x)} dx$$

dove $\mu = E(X) \in \mathbb{R}^n$ è il vettore media

e $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è la matrice di covarianza

$$Q_{ij} := \mathrm{Cov}(X_i; X_j) := E\left[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right]$$

★ ovvero se $\mathcal{L}_X \ll \text{Lebesgue}$ con $\dfrac{d\mathcal{L}_X}{d\mathcal{L}eb} = f$

→ sono def equivalenti, anche se $\Downarrow$ non è banale

HW: trovare un esempio di vettore aleatorio (X_1, X_2) t.c. X non è gaussiano risp. alla def 1 ma X_i sono entrambe v.a. gaussiane

☆ Se $X_1, X_2, \dots, X_n$ sono v.a. gaussiane indipendenti, allora $X = (X_1, \dots, X_n)$ è un vettore gaussiano (provare)

• **Def** un processo gaussiano X si dice centrato se

$$E(X_t) \equiv 0$$

• **Def** se X è un processo gaussiano la sua funzione di covarianza è

$$c(s,t) := \mathrm{Cov}(X_s; X_t) \qquad \forall s,t \in \mathbb{R}_+$$

Thm: data una funzione $c : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ tale che:

$\forall t_1, t_2, \dots, t_n \geq 0 \quad Q_{ij} := c(t_i; t_j)$ definisce una matrice Q semidef positiva simmetrica

Allora $\exists!$ una legge su $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ tale che il processo delle proiezioni canoniche $(\pi_t)_{t \geq 0}$ è gaussiano, centrato, con funz. di covarianza c.

☆ Data c esiste un processo gaussiano centrato .... La sua legge è univocamente determinata

☆ Il moto Browniano è un processo gaussiano centrato con funzione di covarianza

$$c(s,t) = \min(s,t)$$

e traiettorie continue

→ Questo thm sta sul Revuz - Yor

<u>Dim</u> la prima parte è di nuovo una applicazione del thm di estensione di Kolmogorov (i dettagli forse poi)

★ perché Q deve essere semidef positiva?

$Q \in M_{n\times n}$ $Q_{ij} := c(t_i, t_j) := Cov(X_{t_i}; X_{t_j})$

semidef pos $\Leftrightarrow$ $\forall a \in \mathbb{R}^n$ $a^T Q a \overset{?}{\geq} 0$

$$a^T Q a = \sum_{i,j} a_i Q_{ij} a_j = \sum_{i,j} a_i a_j Cov(X_{t_i}; X_{t_j})$$

$$= \sum_{i,j} Cov(a_i X_{t_i}; a_j X_{t_j}) = Cov\left(\sum_i a_i X_{t_i}; \sum_j a_j X_{t_j}\right)$$

$$= Var(a \cdot X^{(n)}) \geq 0$$

dove $X^{(n)} := (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$

★ Per inciso, Q è anche simmetrica, quindi si diagonalizza con una rotazione.

◉ Caso del BM $(B_t)_{t\geq 0}$

→ verifico che sia un processo gaussiano

$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$

$(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ è gaussiano?

$\sum_{i=1}^n a_i B_{t_i}$ è gaussiano? $\qquad t_0 = 0$

$$B_{t_i} = \underbrace{(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})}_{D_i} + (B_{t_{i-1}} - B_{t_{i-2}}) + \dots + \underbrace{(B_{t_1} - B_{t_0})}_{D_1} + \overset{\overset{0}{\parallel}}{B_{t_0}}$$

$$\sum_1^n a_i B_{t_i} = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^i D_j = \sum_{j=1}^n D_j \underbrace{\sum_{i=j}^n a_i}_{b_j} = b \cdot D \sim \mathcal{N}$$

D è gaussiano perché ha componenti gaussiane indipendenti

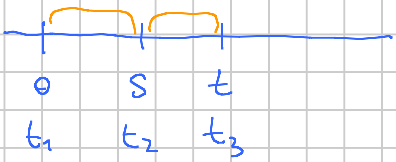
→ è centrato

$$E(B_t) = E(\underbrace{B_t - B_0}_{\mathcal{N}(0,t)}) + E(\underbrace{B_0}_{=0}) = 0 + 0 = 0$$

→ $c(s,t) := \mathrm{Cov}(B_s, B_t) = \mathrm{Cov}(B_s, (B_t - B_s) + B_s)$

suppongo $s \leq t$

$$= \underbrace{\mathrm{Cov}(B_s, B_t - B_s)}_{= \mathrm{Cov}(B_s - B_0,\, B_t - B_s)} + \mathrm{Var}(B_s) = \mathrm{Var}(B_s - B_0) = s$$



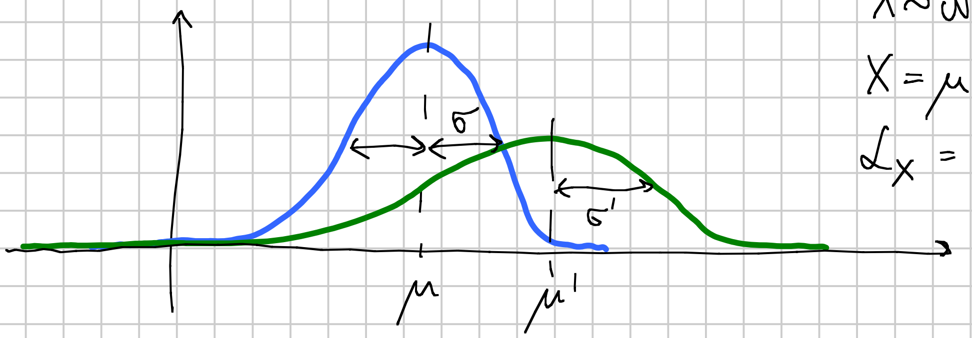
siccome sono indipendenti, sono scorrelati (= Cov zero)

■ SULLA DISTRIBUZIONE GAUSSIANA

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ X ha legge Gaussiana (o normale) di media μ e var. σ^2

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$ X ha legge normale standard

$$f_{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



$X \sim \mathcal{N}(\mu, 0)$ vuol dire
$X = \mu$ q.c. (deterministica)
$\mathcal{L}_X = \delta_\mu$

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = \mu$$

check

$$Var(X) := E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2 = \ldots = \sigma^2$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha + \beta X \sim \mathcal{N}(\alpha + \beta\mu\,;\ \beta^2\sigma^2)$ ← check

hint: $Y := \alpha + \beta X$

$$F_Y(t) := P(Y \le t) := P(\alpha + \beta X \le t) \overset{\beta>0}{=} P\left(X \le \frac{t-\alpha}{\beta}\right) =: F_X\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right)$$

derivo ...

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = \frac{d}{dt} F_X\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right) = F_X'\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right)\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta} f_X\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right)$$

$X \sim \mathcal{N}(\mu_X; \sigma_X^2)$ $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y; \sigma_Y^2)$ indipendenti
allora $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y\,;\ \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$

formula: $$f_{X+Y}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, t-x)\,dx \underset{\text{indip}}{=} \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(t-x)\,dx$$

conto: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2} - \frac{(t-x-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\} dx = \dots$

$$\dots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}} \exp\left\{-\frac{(t-\mu_X-\mu_Y)^2}{2\sigma_X^2+2\sigma_Y^2}\right\}$$

vettore gaussiano definito come $X = (X_1, \dots, X_n)$ se $\forall a \in \mathbb{R}^n$
$a \cdot X$ ha legge gaussiana

se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ e $N \in M_{m\times n}$

μ: $\mathbb{R}^n$; Σ: $M_{n\times n}$ simmetrica semidef pos.

allora $NX \sim \mathcal{N}(N\mu, N\Sigma N^T)$

SULLA COMPATIBILITÀ DELLE LEGGI FINITO-DIM

(per $\exists$ del BM e per quello più generale dei processi gaussiani)

$\mathcal{X} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ $\quad\mathcal{G}$ σ-alg prodotto $\quad \mathcal{G} = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{R}_+}$

$c: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ t.c. $\quad Q_{ij} := c(t_i; t_j)$ simm. semidef pos.

$\forall J = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ $\quad \forall B \in \mathbb{R}^J \neq \mathbb{R}^n$

$\mathcal{L}^J(B) := P(\mathcal{N}(0; Q^J) \in "B")$

$\mathbb{R}^J = \{$funzioni da J in $\mathbb{R}\}$
$\mathbb{R}^n =$ vettori
isomorfi quando numeriamo gli elementi di J

$\overset{\text{hope}}{=} P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B)$

X_t il processo che vogliamo costruire

X gaussiano $\Rightarrow (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \sim \mathcal{N}(0; Q)$

$Q_{ij} = \mathrm{Cov}(X_{t_i}; X_{t_j}) =: c_X(t_i, t_j)$ (hope)

$Q^J \in M_{n\times n}$ $\quad Q^J_{ij} := c(t_i; t_j)$

Compatibilità: J_1, J_2 finiti $\quad B_1 \in \mathbb{R}^{J_1}$ $\quad B_2 \in \mathbb{R}^{J_2}$

$\mathrm{cyl}_{J_1}(B_1) = \mathrm{cyl}_{J_2}(B_2)$

Voglio dimostrare che $\mathcal{L}^{J_1}(B_1) = \mathcal{L}^{J_2}(B_2)$

$\star$ Lemma : J_1, J_2 finiti $B_1 \in \mathbb{R}^{J_1}$ $B_2 \in \mathbb{R}^{J_2}$

$$cyl_{J_1}(B_1) = cyl_{J_2}(B_2)$$

Allora $\exists \tilde{B} \in \mathbb{R}^{J_1 \cap J_2}$: $cyl_{J_i}(B_i) = cyl_{J_1 \cap J_2}(\tilde{B})$ $i=1,2$

Dim $A = cyl_{J_i}(B_i)$ $i=1,2$

$$E := \left\{ x \in \mathbb{X} : \exists y \in A : x\big|_{J_1 \cap J_2} = y\big|_{J_1 \cap J_2} \right\} \supseteq A$$

$\forall x \in E$ $\exists y \in A : x\big|_{J_1 \cap J_2} = y\big|_{J_1 \cap J_2}$

sia $x' \in \mathbb{X}$ $x' := \begin{cases} x & \text{su } J_1^c \\ y & \text{su } J_1 \end{cases}$ $x'\big|_{J_1 \cap J_2} = y\big|_{\dots} = x\big|_{\dots}$

$y \in A = cyl_{J_1}(B_1) := \left\{ z \in \mathbb{X} : z\big|_{J_1} \in B_1 \right\}$

$\Rightarrow y\big|_{J_1} \in B_1 \Rightarrow x' \in A = cyl_{J_2}(B_2)$

$\Rightarrow x'\big|_{J_2} \in B_2$ $x\big|_{J_2} = x'\big|_{J_2} \in B_2 \Rightarrow x \in A$

Ho dimostrato $E = A$

$\tilde{B} := \left\{ w \in \mathbb{R}^{J_1 \cap J_2} : \exists y \in A : w = y\big|_{J_1 \cap J_2} \right\}$

---

ora 12

$$cyl_{J_1 \cap J_2}(\tilde{B}) := \left\{ x \in \mathbb{X} : x\big|_{J_1 \cap J_2} \in \tilde{B} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{X} : \exists y \in A : x\big|_{J_1 \cap J_2} = y\big|_{J_1 \cap J_2} \right\} =: E = A$$

$\square$

Dim (compatibilità)

$J_1 \cap J_2 = \{t_1, \dots, t_n\}$ $J_1 = \{t_1, \dots, t_n, \dots, t_m\}$ $m \geq n$

Lemma $\Rightarrow$ $\exists \tilde{B} \in \mathbb{R}^n$: $cyl_{J_1 \cap J_2}(\tilde{B}) = cyl_{J_1}(B_1)$

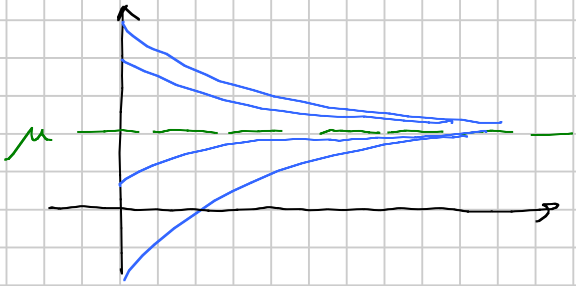
$\Rightarrow B_1 = \tilde{B} \times \mathbb{R}^{m-n}$

$$\mathcal{L}^{J_1}(B_1) := P\left(\mathcal{N}(0; Q^{J_1}) \in \tilde{B} \times \mathbb{R}^{m-n}\right) = P\left(\mathcal{N}(0; Q^{J_1 \cap J_2}) \in \tilde{B}\right) =: \mathcal{L}^{J_1 \cap J_2}(\tilde{B})$$

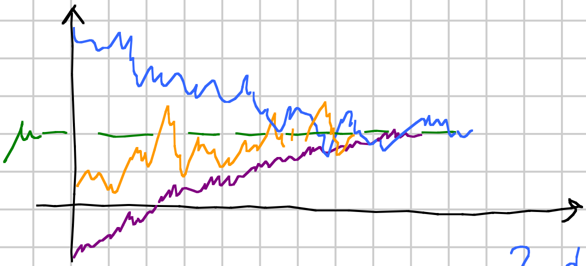
DUE CHIACCHIERE SU SDE

$x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $\qquad \theta > 0 \qquad \mu \in \mathbb{R}$

$$x' = \theta(\mu - x)$$



Vorremmo introdurre del rumore



è il più semplice modello per tassi di interesse

$$x' = \theta(\mu - x) + f_B$$

? dovrebbe essere il "white noise" ovvero una sorta di derivata del BM

$$x' = f_B \qquad x(t) = B_t \qquad f_B(t) = \dot{B}_t$$

✯ BM non è derivabile

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \{\theta(\mu - x(s)) + f_B(s)\}\, ds$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \theta(\mu - x(s))\, ds + \underbrace{\int_0^t f_B(s)\, ds}_{B_t}$$

forma integrale dell'eq. differenziale

Più in generale

$$x' = a(x) + b(x) f_B$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t a(x(s))\, ds + \int_0^t b(x(s)) \underbrace{f_B(s)\, ds}_{dB_s}$$

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s)\, ds + \int_0^t b(X_s)\, dB_s$$

eq. diff stocastica

$F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $\qquad \int_0^t g(s)\, dF(s)$ $\qquad$ cos'è ?

$g : [0,t] \to \mathbb{R}$

μ misura finita su $[0,t]$

$$\int_0^t g(s)\,d\mu(s) = \int_0^t g(s)\,\mu(ds) = \int_{[0,t]} g\,d\mu = \mu(g)$$

$$\boxed{F(s) := \mu([0,s])}$$

per quali F esiste μ con questa proprietà?

$$\mu(g) = \int_0^t g(s)\,dF(s)$$

se $\mu \ll Leb$ allora $\exists f = \frac{d\mu}{dLeb}$ densità

$$\mu(g) = \int_0^t g(s) f(s)\,ds$$

$$F(s) = \int_0^s \mu(du) = \int_0^s f(u)\,du \quad \Leftrightarrow \quad f = F'$$

Se F è derivabile

$$\int_0^t g(s)\,dF(s) = \int_0^t g(s) F'(s)\,ds$$

Se F non è derivabile il LHS è più generale

★ $\int_0^t g(s)\,dF(s)$ ha senso se F è monotona non decrescente

F_1, F_2 siano monotone non decrescenti

$$F = F_1 - F_2$$

$$\int_0^t g(s)\,dF(s) = \int_0^t g(s)\,dF_1(s) - \int_0^t g(s)\,dF_2(s)$$

★ Queste sono tutte e sole le funzioni BV e questo tipo di integrale si chiama di Stiljes

☒ VARIAZIONE QUADRATICA E VARIAZIONE TOTALE

Considero $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$ e le sue partizioni

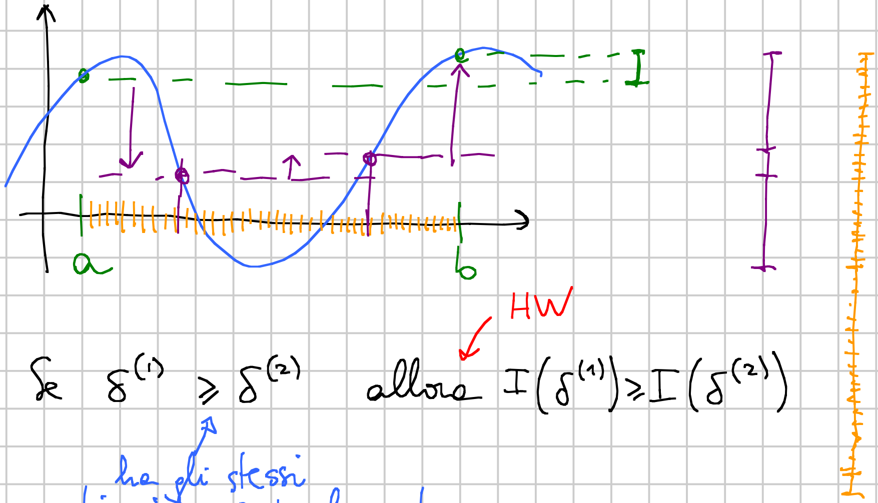
$$\Delta := \Delta_{[a,b]} := \bigcup_{n \geq 1} \left\{ (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : a = \delta_0 < \delta_1 < \dots < \delta_n = b \right\}$$

$\delta \in \Delta \qquad |\delta| := \max_i (\delta_i - \delta_{i-1})$ mesh della partizione

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$N_\delta := \dim(\delta)$

$I_f : \Delta \to \mathbb{R}_+ \qquad \delta \mapsto \sum_{i=1}^{N_\delta} |f(\delta_i) - f(\delta_{i-1})|$



HW

★ Se $\delta^{(1)} \geqslant \delta^{(2)}$ allora $I(\delta^{(1)}) \geqslant I(\delta^{(2)})$

ha gli stessi punti più eventualmente altri

• <u>def</u> Variazione totale di f su $[a,b]$ è

$$V(f) = V_{[a,b]}(f) := \sup_{\delta \in \Delta_{[a,b]}} I_f(\delta) = \lim_{|\delta| \to 0} I_f(\delta)$$

se f è continua

$$V(f) \in [0, \infty]$$

★ f si dice BV bounded variation se $V(f) < \infty$

\+ difficile

HW: B sia BM $\left(X_t := \int_0^t B_s \, ds\right)$ $\qquad Y_t : B_t - B_1 t \qquad t \in [0;1]$

dimostrare che X_t e Y_t sono processi gaussiani centrati e determinare le funzioni di covarianza.

Le traiettorie del BM non sono BV. Per arrivarci introduciamo la variazione quadratica che è alla base dell'integrale di Itô.

- **Def** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $X = (X_t)_{t \geq 0}$ processo stocastico su $\mathbb{R}$

$\langle X \rangle := [X] := \langle X, X \rangle := [X, X]$ variazione quadratica $\langle X \rangle = (\langle X \rangle_t)_{t \geq 0}$

è un processo stocastico tale che per ogni $t \geq 0$

$$\boxed{S_X^{[0,t]}(\delta) \xrightarrow[|\delta| \to 0]{P} \langle X \rangle_t}$$

dove $\boxed{S_X^{[a,b]}(\delta) = \sum_{i=1}^{N\delta} \left(X_{\delta_i} - X_{\delta_{i-1}} \right)^2}$ e $\delta \in \Delta_{[a,b]}$

- **Oss**: $\langle X \rangle_{t+s} - \langle X \rangle_t = P\text{-}\lim_{\delta} \left(S_X^{[0,t+s]}(\delta) - S_X^{[0,t]}(\delta) \right)$

$\delta \in \Delta_{[0,t+s]}$
$t \in \delta$

$$= P\text{-}\lim_{\delta} S_X^{[t,t+s)}(\delta) \geq 0$$

$\rightarrow \langle X \rangle_t$ è un processo non decrescente con $\langle X \rangle_0 = 0$

Variazione quadratica del BM

Prop: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ B un BM allora $\langle B \rangle_t = t$ q.c.

inoltre $\forall t \geq 0$

$$\boxed{S_B^{[0,t]}(\delta) \xrightarrow[|\delta| \to 0]{L^2} t}$$

(convergenza L^2 implica quella in P.)

Dim $\quad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} X \qquad E\left[(X_n - X)^2\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Dobbiamo calcolare $E\Big[\big(\underbrace{S_B^{[0,t]}(\delta)}_{X_\delta} - t\big)^2\Big]$

Prima provo con $E(X_\delta)$

$$X_\delta = \sum_{i=1}^{N_\delta} \left(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}\right)^2 \qquad \delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{N_\delta})$$

$$0 = \delta_0 < \delta_1 < \dots < \delta_{N_\delta} = t$$

$$E(X_\delta) = \sum_{i=1}^{N_\delta} E\Big[\big(\underbrace{B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}}\big)^2\Big] = \sum_i (\delta_i - \delta_{i-1}) = \delta_{N_\delta} - \delta_0 = t$$

incremento BM $\sim \mathcal{N}(0; \delta_i - \delta_{i-1})$

Allora $E\left[(X_\delta - t)^2\right] =: Var(X_\delta)$

$$Var(X_\delta) = Var\left(\sum_i \left(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{N_\delta} Var\left[\left(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}\right)^2\right]$$

$\left[\left(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}\right)^2\right]_{i=1,\dots,N_\delta}$ v.a. indip.

HW: $(X_i)_{i\in I}$ indipendenti e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile $\Rightarrow (f(X_i))_{i\in I}$ indipendenti

$$Var\left[\left(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}\right)^2\right] = E\left[\left(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}\right)^4\right] - (\delta_i - \delta_{i-1})^2 = 3(\delta_i - \delta_{i-1})^2 - (\delta_i - \delta_{i-1})^2$$

$$E\left[(X - E(X))^2\right] = E(X^2) - E(X)^2$$

$$Var(X_\delta) = 2\sum_{i=1}^{N_\delta} (\delta_i - \delta_{i-1})^2 \leq 2|\delta|\, t \xrightarrow[|\delta|\to 0]{} 0$$

★ Convergenza in P $\Rightarrow$ $\exists$ sottosuccessione che converge q.c.

Non vale in generale che $X_\delta \xrightarrow{q.c.} t$ dipende dalla successione $\delta^{(n)}$

Per qualunque successione $\delta^{(n)}$ con $|\delta^{(n)}| \to 0$ ho convergenza in L^2 e in P. Per alcune anche q.c.

• **Prop** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ B un BM $t>0$ $\delta^{(n)} \in \Delta_{[0,t]}$ $\delta^{(n+1)} \geq \delta^{(n)}$

Allora $S_B^{[0,t]}(\delta^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} t$ (TEST ?)

• **Prop** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ B un BM $t>0$ $\delta^{(n)} \in \Delta_{[0,t]}$ t.c. $\sum_{n\geq 1} |\delta^{(n)}| < \infty$

Allora $S_B^{[0,t]}(\delta^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} t$

Dim $X_n := S_B^{[0,t]}(\delta^{(n)})$

disug. di Chebyshev

$\forall \varepsilon > 0$

$$\mathrm{Var}(X_n) \leq 2|\delta^{(n)}|t \quad \Rightarrow \quad P(|X_n - t| > \varepsilon) \leq \varepsilon^{-2}\, \mathrm{Var}(X_n)$$

$$\sum_{n\geq 1} P(|X_n - t| > \varepsilon) \leq \varepsilon^{-2}\, 2t \sum_{n\geq 1} |\delta^{(n)}| < \infty$$

$\Downarrow$ per Borel-Cantelli

q.o. ω $\exists\, n_0(\omega)$: $|X_n - t| \leq \varepsilon$ $\forall n \geq n_0(\omega)$

q.c. $\limsup_{n\geq 1} |X_n - t| \leq \varepsilon$

prendo $\varepsilon = \frac{1}{k}$ e faccio l'intersezione al variare di $k \geq 1$ di questi eventi q.c. . Ottengo q.c. $\limsup_{n\geq 1} |X_n - t| = 0$

q.c. $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t$

HW: determinare $\langle X \rangle$ con :

i. $X_t = \alpha B_t$

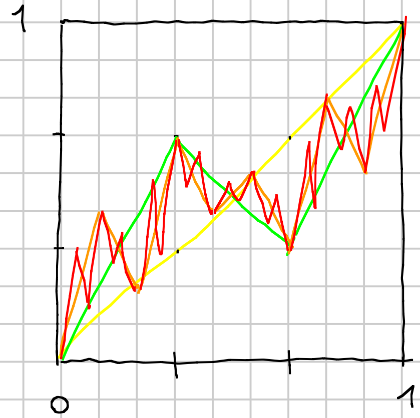
ii. $X_t = t B_t$

iii. $X_t = B_t^2$

iv. $X_t = \int_0^t B_s\, ds$

☆ A fine corso calcoleremo $\langle X \rangle$ con la formula di Itō

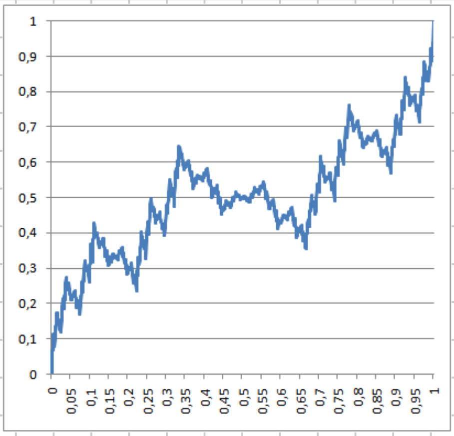
★ Le funzioni BV hanno variazione quadratica nulla (lo vediamo fra poco applicato al BM)



$$(1-0)^2 = 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$$

un esempio deterministico



• BM ha variazione totale infinita

<u>Prop</u> $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ B un BM

Allora q.o.-ω $\forall a<b$ $\quad V_{[a,b]}(B_\cdot(\omega)) = \infty$

<u>Dim</u> Fisso $a<b$ $\quad \delta^{(n)} \in \Delta_{[a,b]}$ $\quad |\delta^{(n)}| \to 0$

$$S_B^{[a,b]}(\delta^{(n)}) = \sum_{i=1}^{N_\delta} \left(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}\right)^2 \qquad a=\delta_0<\delta_1<\dots<\delta_{N_\delta}=b$$

$$\le \max_i |B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}| \underbrace{\sum_i |B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}|}_{\le V_{[a,b]}(B_\cdot(\omega)) := \sup_\delta \sum |B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}|} \le V_{[a,b]}(B) \max_{|t-s|<|\delta|} |B_t - B_s|$$

$B_\cdot$ è continua su $[a,b]$ $\Rightarrow$ unif. continua

(check)

$\forall \omega \quad \forall \varepsilon>0 \ \exists \eta(\omega) : \ |t-s| \le \eta \Rightarrow |B_t(\omega) - B_s(\omega)| \le \varepsilon$

$|\delta^{(n)}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \forall \varepsilon>0 \quad \exists n_0(\omega) : n \ge n_0 \Rightarrow |\delta^{(n)}| \le \eta(\omega)$

$\Rightarrow \max_{|t-s|<|\delta|} |B_t - B_s| \le \varepsilon$

$\forall \omega \ \forall \varepsilon>0 \quad \exists n_0(\omega) : \forall n \ge n_0 \quad S_B^{[a,b]}(\delta^{(n)}) \le \varepsilon V_{[a,b]}(B)$

A patto di prendere una sottosuccessione

$$b-a = \text{q.c.}-\lim_{n\to\infty} S_B^{[a,b]}(\delta^{(n)}) \le \varepsilon V_{[a,b]}(B) \qquad \text{q.c.}$$

per q.o. ω $\quad V_{[a,b]}(B.(\omega)) \geq \varepsilon^{-1}(b-a)$

faccio l'intersezione per $\varepsilon = \frac{1}{k}$ $\quad k \to \infty$

$$\text{q.c.} \quad V_{[a,b]}(B) = \infty$$

faccio l'intersezione per $a,b \in \mathbb{Q}$, $a,b>0$

$0<x<y$ qualsiasi $\quad \exists\, a,b \in \mathbb{Q} : x<a<b<y$

$$V_{[x,y]}(B) \geq V_{[a,b]}(B) = \infty \quad \text{q.c.}$$

□

- BM non è α-Hölderiano per $\alpha \geq \frac{1}{2}$

Prop $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad B$ un BM

Allora q.o.-ω $\quad \forall \alpha > \frac{1}{2}$ $\quad \forall\, 0 \leq a < b$ $\quad B.(\omega)$ non è α-Höld su $[a,b]$

Dim α-Höld vuol dire

$$\forall\, s,t \in [a,b] \quad |B_t - B_s| \leq c(\omega)|t-s|^\alpha$$

$$\Longleftrightarrow \quad |B_t - B_s|^{\alpha^{-1}} \leq c'(\omega)|t-s|$$

$$S_B^{[a,b]}(\delta^{(n)}) = \sum_{i=1}^{N_\delta} \left(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}\right)^2 \qquad a = \delta_0 < \delta_1 < \dots < \delta_{N_\delta} = b$$

$\alpha > \frac{1}{2}$ $\quad \alpha^{-1} < 2$ $\quad 2-\alpha^{-1} > 0$

R.P.A. $B.(\omega)$ α-Höld

$$\leq c'(\omega) \sum_{i=1}^{N_\delta} |\delta_i - \delta_{i-1}|\,|B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}|^{2-\alpha^{-1}}$$

$$\leq c'(\omega) \max_{|t-s|<|\delta|} |B_t - B_s|^{2-\alpha^{-1}}(b-a)$$

Come prima..

$$\forall \omega\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\omega) : n \geq n_0 \quad \max_{|t-s|<|\delta^{(n)}|} |B_t - B_s|^{2-\alpha^{-1}} \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow S_B^{[a,b]}(\delta^{(n)}) \leq \varepsilon\, c'(\omega)(b-a)$$

A patto di prendere una sottosuccessione

$$b-a = \text{q.c.-}\lim_{n\to\infty} S_B^{[a,b]}(\delta^{(n)}) \leq \varepsilon\, c'(\omega)(b-a) \qquad \text{q.c.}$$

$$c'(\omega) \geq \varepsilon^{-1} \qquad \text{q.o. } \omega$$

Come prima trovo $c' = \infty$ q.c. $\Rightarrow c = \infty$ q.c.

Come al solito interseco per $\alpha > \frac{1}{2}$ razionale e $a, b > 0$ razionali e ho finito $\square$

☆ Il fatto che non sia $\frac{1}{2}$-Höld non è banale

- BM q.c. non è derivabile in nessun punto $t \geq 0$.
- BM q.c. ha traiettorie con variazione quadratica infinita (!)

$$\text{q.c.} \quad \sup_{\delta \in \Delta} S_B(\delta) = \infty$$

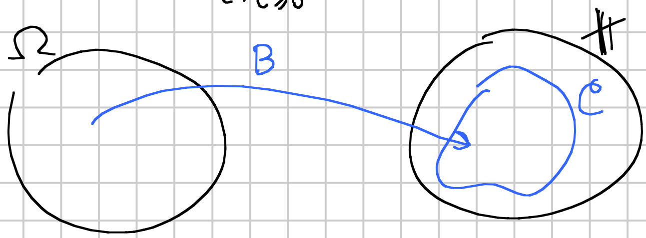
$$\left(\text{mentre} \quad \lim_{|\delta| \to 0} S_B(\delta) = b - a \quad \text{per successioni } \delta^{(n)} \text{ opportune} \right)$$

SPAZIO DI WIENER

è lo spazio delle funzioni continue con associata la misura di probabilità che "estrae" traiettorie Browniane

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad$ B un BM $\quad\quad$ $B = (B_t)_{t \geq 0}$

$B : \Omega \to \cancel{\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} = \mathbb{X}}$



$B : \Omega \to \mathcal{C}$

la σ-algebra da mettere su $\mathcal{C}$ è quella "ereditata" da $\mathcal{G} = \mathcal{B}^{\otimes \mathbb{R}_+}$

→ def la traccia di $\mathcal{G}$ su $\mathcal{C}$ è la σ-alg su $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{H} := \{ A \cap \mathcal{C} : A \in \mathcal{G} \}$$

la legge di B su $(\mathcal{C}, \mathcal{H})$ si chiama misura di Wiener

$$\nu = \mathcal{L}_B \quad \text{misura su } \mathcal{H}$$

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) \xrightarrow{B} (\mathcal{C}, \mathcal{H}, \nu)$$ ← spazio di Wiener

l'identità $\mathcal{C} \circlearrowleft$ è un BM su $(\mathcal{C}, \mathcal{H}, \nu)$

$\int_0^t X_s \, dB_s$ integrale di Itō

☆ Se X è BV l'integrale si può definire tramite integrazione per parti

Anno scorso, ora 14: f continua e g BV

$\int_a^b f(s)\,dg(s)$ è definito

$$\int_a^b g(s)\,df(s) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(s)\,dg(s)$$

$\int_0^t B_s \, dB_s = ?$ non si può

☆ Per identificare la classe di processi X per cui definisco $\int_0^t X_s \, dB_s$ dobbiamo introdurre alcuni concetti:

FILTRAZIONI E PROCESSI ADATTATI E PROGR. MISURABILI

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

- **Def** una *filtrazione* è una famiglia di σ-algebre crescente $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ oppure $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}$ $\forall i$
  $s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$
- **Def** Dato un processo $X = (X_t)_{t\geq 0}$ la sua *filtrazione naturale* è
  $$\boxed{\mathcal{F}_t := \sigma\big((X_s)_{s\leq t}\big)} \qquad \forall t \geq 0$$

☆ L'idea intuitiva è che le σ-algebre rappresentano livelli di conoscenza: $\mathcal{F}$ la conoscenza perfetta; $\mathcal{F}_t$ la conoscenza fino al tempo t (di X, oppure della filtrazione)

- **Def** Un processo X è *adattato* alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ se

$$X_t \text{ è } \mathcal{F}_t\text{-misurabile} \qquad \forall t\geq 0$$

★ Ogni processo è adattato alla propria filtrazione naturale e a tutte e sole quelle maggiori

$$X \text{ adattato a } (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} \iff \mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t \quad \forall t\geq 0$$

(dove $\mathcal{G}_t$ è la filtr. nat. di X)

- **Prop**: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ B un BM, $\mathcal{F}_t$ la filtr. nat

Allora $\forall s<t$ $B_t - B_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$

Dim X indip da $\mathcal{G}$ $\iff$ $\sigma(X)$ indip da $\mathcal{G}$

$$\iff \forall A\in\sigma(X)\ \forall B\in\mathcal{G},\quad P(A\cap B) = P(A)P(B)$$

$$\iff \forall \tilde{A}\in\mathcal{B}\ \forall \underbrace{B\in\mathcal{G}}_{\mathcal{F}_s},\quad P(\{\underbrace{X}_{B_t-B_s}\in\tilde{A}\}\cap B) = P(X\in\tilde{A})P(B)$$

No — vedi ora 17

$$B\in\mathcal{F}_s := \sigma((B_u)_{u\leq s}) \implies B = \{(B_{u_n})_{n\geq 1}\in\tilde{B}\}$$

$$0\leq u_n\leq s,\ n\geq 1 \qquad \tilde{B}\in\mathcal{B}^{\otimes\mathbb{N}}$$

$$P(B_t - B_s\in\tilde{A}, (B_{u_n})_{n\geq 1}\in\tilde{B}) =$$

$$P(B_t - B_s\in\tilde{A}, (B_{u_n} - B_{u_{n-1}})_{n\geq 1}\in\tilde{\tilde{B}}) = P(B_t - B_s\in\tilde{A})P(\dots) \qquad \square$$

- BM rispetto a una filtrazione

Def $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ si chiama *spazio filtrato*

Def Dato un BM B su uno spazio filtrato, B è un *moto Browniano rispetto alla filtrazione* se:

i. B è adattato

ii. $\forall s<t \quad B_t - B_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$

★ La ii. impone che $\mathcal{F}_t$ non sia "troppo" ricca rispetto a $\sigma((B_s)_{s\leq t})$

● **Def** Un processo X su uno spazio filtrato si dice progressivamente misurabile se

$$\boxed{X\big|_{\Omega\times[0,t]} \quad \text{è} \quad \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}[0,t]\text{ - misurabile}} \qquad \forall t\geq 0$$

★ X adattato è una richiesta più debole:

$$X_t \quad \text{è} \quad \mathcal{F}_t\text{- mis} \qquad \forall t\geq 0$$

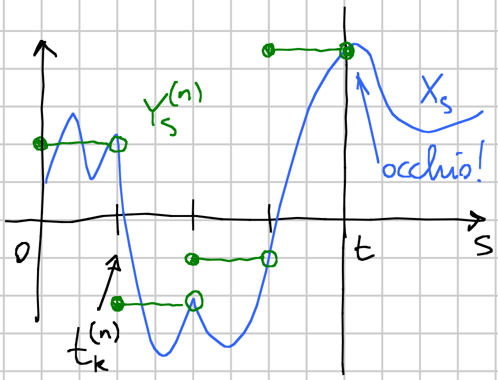
● **Prop** X processo su spazio filtrato

i. X progr. misurabile $\Rightarrow$ X adattato

ii. X adattato e q.c. continuo a destra (o a sinistra) e spazio completo $\Rightarrow$ X progr. misurabile

Dim i. (check)

ii. Fissiamo $t>0$ (per $t=0$ è ovvio)



$n\geq 1$

$$0=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\dots<t_{2^n}^{(n)}=t \qquad t_k^{(n)}:=\frac{k}{2^n}t$$

$$Y_s^{(n)}:=\begin{cases} X_{t_{k+1}^{(n)}} & \text{se } s\in[t_k^{(n)},t_{k+1}^{(n)}) \\ X_t & s=t\end{cases}$$

---

ora 16

$$\left.\begin{aligned} &Y_s^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} X_s \qquad \forall s\in[0,t] \quad \forall\omega\in\Omega \\ &Y^{(n)} \text{ è } \mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}[0,t]\text{ - misurabile}\end{aligned}\right\} \; X\big|_{\Omega\times[0,t]} \text{ è } \mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}[0,t]\text{ - misurabile}$$

① Convergenza puntuale

$s = t \qquad Y_s^{(n)} = X_t \quad \forall n$

$s \in [0,t) \qquad Y_s^{(n)} = X_{t_{k+1}^{(n)}} \qquad$ con $\quad k: \ t_k^{(n)} \leq s < t_{k+1}^{(n)}$

$\iff \ \frac{k}{2^n} t \leq s < \frac{k+1}{2^n} t$

$s < t_{k+1}^{(n)} < s + 2^{-n} t \quad \Rightarrow \quad t_{k+1}^{(n)} \searrow s \qquad X_\cdot(\omega)$ è cont. a dx

$$X_s(\omega) = \lim_{u \searrow s} X_u(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{t_{k+1}^{(n)}}(\omega) = \lim_{n\to\infty} Y_s^{(n)}(\omega)$$

$k = k(n)$

② Misurabilità di $Y^{(n)}$

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad Y^{(n)}$ come mappa da $\Omega \times [0,t]$ in $\mathbb{R}$

$$(Y^{(n)})^{-1}(A) = \{(\omega,s) \in \Omega \times [0,t] : Y_s^{(n)}(\omega) \in A\}$$

$$= \{(\omega,s) : s = t \text{ e } X_t \in A \text{ oppure } X_{t_{k+1}^{(n)}}(\omega) \in A \text{ dove } k: s \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)})\}$$

$$= \underbrace{\{X_t \in A\}}_{\in \mathcal{F}_t} \times \underbrace{\{t\}}_{\in \mathcal{B}} \cup \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left[\underbrace{\{X_{t_{k+1}} \in A\}}_{\in \mathcal{F}_{t_{k+1}} \subseteq \mathcal{F}_t} \times \underbrace{[t_k, t_{k+1})}_{\in \mathcal{B}} \right] \in \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}[0,t]$$

③ Misurabilità di $X|_{\Omega\times[0,t]}$ 　　P⊗L ?

$(Y^{(n)})_{n\geq 1}$ successione di funzioni misurabili su $(\Omega \times [0,t], \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B})$

$Y := \limsup_n Y^{(n)}$ è misurabile

$Y = X|_{\Omega\times[0,t]}$ sono uguali $\forall \omega : X_\cdot(\omega)$ è cont. a dx e $\forall s \in [0,t]$

$\exists H \in \mathcal{F} : P(H) = 1$ e $X_\cdot(\omega)$ cont. a dx $\forall \omega \in H$

$$(X|_{\Omega\times[0,t]})^{-1}(A) = \Big[\underbrace{Y^{-1}(A)}_{\in \mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}} \cap \underbrace{H \times [0,t]}_{\in \mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}}\Big] \cup \Big[(X|_{\Omega\times[0,t]})^{-1}(A) \cap \underbrace{H^c \times [0,t]}_{\in \mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}} \Big]$$

per completezza

(sistemato nell'audio a fine ora 17)

★ Per chiudere bene occorre fare una ipotesi aggiuntiva

- **Def** Uno spazio di prob. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ è completo se
  $\forall A \subseteq \Omega$: $\exists H \in \mathcal{F}$ con $A \subseteq H$ e $P(H)=0$ si ha $A \in \mathcal{F}$
- **Def** Uno spazio filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ è completo se
  $\forall A \subseteq \Omega$: $\exists H \in \mathcal{F}$ con $A \subseteq H$ e $P(H)=0$ si ha $A \in \mathcal{F}_0$

→ Conviene sempre supporre che gli spazi con cui lavoriamo siano completi e non costa niente farlo

- PROCESSI CHE SI INTEGRANO : PROGR. MIS. E L^2

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ B un BM rispetto a $\mathcal{F}_t$

$0 \leq a < b$ fissati

$$M^2_{a,b} := \{\text{processi progr. misurabili}\} \cap L^2(\Omega \times [a,b], \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}, P \times \mathcal{L})$$

$$\boxed{I : M^2_{a,b} \longrightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)}$$

$$I(X) := \int_a^b X_s \, dB_s$$ notazione

HW: $M^2_{a,b} = L^2(\Omega \times [a,b]; \mathcal{G}; P \times \mathcal{L})$

Per $\mathcal{G}$ opportuna

★ Per costruire I lo definiremo prima sui processi semplici e poi si estende la definizione per densità

→ Occorre la speranza condizionale

La prossima volta ripasso di sp. condiz. e delle sue proprietà (Capitolo 9 del Williams)

- Rifaccio $B_t - B_s$ indipendente da $\mathcal{F}_s$

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad \{B_t - B_s \in A\}$
$\forall F \in \mathcal{F}_s$ $\quad F$

$$\Big\} \quad P(\{B_t - B_s \in A\} \cap F) \overset{?}{=} P(B_t - B_s \in A) P(F)$$

$$\mathcal{F}_s = \sigma((B_u)_{u \in [0,s]})$$

$$X := (B_u)_{u \in [0,s]} : (\Omega; \mathcal{F}_s) \longrightarrow (\mathbb{R}^{[0,s]}; \mathcal{B}^{\otimes [0,s]})$$

$F \in \mathcal{F}_s \qquad F = X^{-1}(G) \qquad G \in \mathcal{B}^{\otimes [0,s]}$

G coinvolge una quantità numerabile di indici

$$G = \{x \in \mathbb{R}^{[0,s]} : (x_{u_1}, x_{u_2}, \dots) \in \tilde{G}\} \quad \text{per } (u_i)_{i \geq 1} \quad u_i \in [0,s]$$

$$F = \{\omega \in \Omega : (B_{u_1}, B_{u_2}, \dots) \in \tilde{G}\}$$

$$P(B_t - B_s \in A, (B_{u_1}, B_{u_2}, \dots) \in \tilde{G}\}$$

u_i NON SONO NUMERATI IN ORDINE!

NO

Invece di "$\forall F \in \mathcal{F}_s$" lavoro sugli insiemi cilindrici

★ L'indipendenza tra due σ-algebre si può verificare su generatori che siano π-system

Prop: $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A}) \quad \mathcal{G} = \sigma(\mathcal{B}) \qquad \mathcal{A}, \mathcal{B}$ π-system

$\forall A \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B} \qquad P(A \cap B) = P(A) P(B)$

Allora $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sono indipendenti

Dim $\forall A \in \mathcal{A}$

$\mu(G) := P(A \cap G)$
$\nu(G) := P(A) P(G)$

$\Big\}$ sono misure finite su $\mathcal{G}$ coincidono su $\mathcal{B}$ $\Rightarrow$ coincidono su $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{B})$

$\forall G \in \mathcal{G} \quad \tilde{\mu}(F) := P(F \cap G)$
$\tilde{\nu}(F) := P(F) P(G)$

$\Big\}$ sono misure su $\mathcal{F}$ che coincidono su $\mathcal{A}$ $\square$

★ Nel caso dei vettori gaussiani indipendenza $\Leftrightarrow$ scorrelazione

$\boxed{\Rightarrow}$ banale $\boxed{\Leftarrow}$ segue

$\uparrow$ $Cov = 0$

<u>Prop</u>: $Z = (X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ vettore gaussiano

$X = (X_1, \dots, X_n) \quad Y = (Y_1, \dots, Y_m)$

$Cov(X_i ; Y_j) = 0 \quad \forall i, j$

Allora X, Y indipendenti

<u>Dim</u>: $f_Z(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = (2\pi)^{-\frac{m+n}{2}} (\det Q)^{-1/2} e^{-\frac{(\dots-\mu)^T Q^{-1} (\dots-\mu)}{2}}$

$i = 1, \dots, n \quad j = n+1, \dots, n+m \quad Q_{ij} = Cov(X_i, Y_{j-n}) = 0$

Q è a blocchi $\left(\begin{array}{c|c} cov X & 0 \\ \hline 0 & cov Y \end{array}\right)$

quindi f_Z si fattorizza e perciò anche la sua legge

$f_Z(x_1 \dots, y_1 \dots) = f_X(x) f_Y(y)$

$\mathcal{L}_Z = \mathcal{L}_X \otimes \mathcal{L}_Y$

$P(X \in A, Y \in B) = P(Z = (X, Y) \in A \times B) = \mathcal{L}_Z(A \times B)$

$= \mathcal{L}_X(A) \mathcal{L}_Y(B) = P(X \in A) P(Y \in B) \qquad \square$

★ torno a $B_t - B_s$ indipendente da $\mathcal{F}_s$

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\forall n \geq 1 \quad \forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad \forall u_1, u_2, \dots, u_n \in [0, s]$

$B_t - B_s$ è indipendente da $(B_{u_1}, \dots, B_{u_n})$, infatti:

$Cov(B_t - B_s ; B_{u_j}) = Cov(B_t ; B_{u_j}) - Cov(B_s ; B_{u_j}) = t \wedge u_j - s \wedge u_j = u_j - u_j = 0$

$\forall j = 1, \dots, n$

$P(B_t - B_s \in A, (B_{u_1}, \dots, B_{u_n}) \in C) = P(B_t - B_s \in A) P((B_{u_1}, \dots, B_{u_n}) \in C)$

SPERANZA CONDIZIONALE

Def: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $X \in L^1(\Omega) = L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ovvero $E(|X|) < \infty$

$\mathcal{G}$ sotto-σ-algebra di $\mathcal{F}$

Allora diciamo che Y è una versione della speranza condizionale di X rispetto a $\mathcal{G}$ e scriviamo

$$Y = E(X|\mathcal{G}) \quad \text{q.c.}$$

se i. $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ — in particolare $\sigma(Y) \subseteq \mathcal{G}$

ii. $\forall G \in \mathcal{G} \quad E(X; G) = E(Y; G)$

★ **Not** $E(\underset{\text{v.a.}}{X}; \underset{\text{evento}}{G}) = \int_G X \, dP = E(X \mathbb{1}_G)$

★ $E(X|G) := \int_\Omega X \, dP(\cdot | G) = \dfrac{E(X;G)}{P(G)}$ media di X condizionata a G

$E(X; G)$ media di X su G

$E(X|\mathcal{G})$ speranza condizionale

★ Definita a meno di "versioni", quindi $E(X|\mathcal{G})$ è una classe di equivalenza di variabili aleatorie

★ **Not** X, Y due v.a. $X \in L^1$

$$E(X|Y) := E(X|\sigma(Y))$$

→ Lemma di Doob: se $Z = E(X|Y)$ q.c.

allora Z è $\sigma(Y)$-mis $\Rightarrow$ $Z = \varphi(Y)$ q.c.

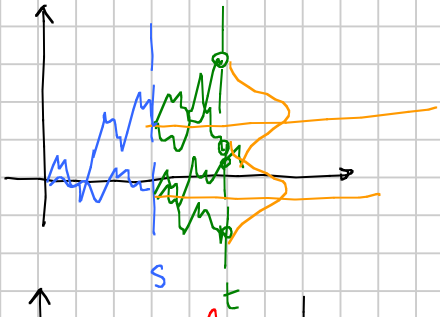
per una qualche funzione $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deterministica

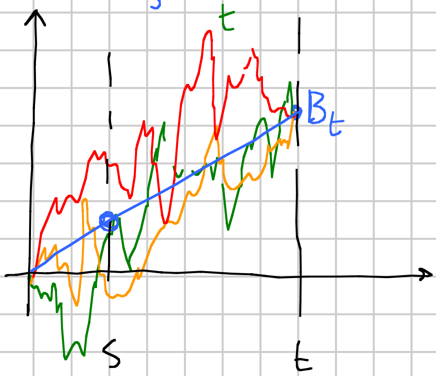
$$\boxed{\exists \varphi : \quad E(X|Y) = \varphi(Y) \quad \text{q.c.}}$$

- Esempi

→ B un BM $\quad s<t$

$$E(B_t \mid B_s) = B_s \quad \text{q.c.}$$

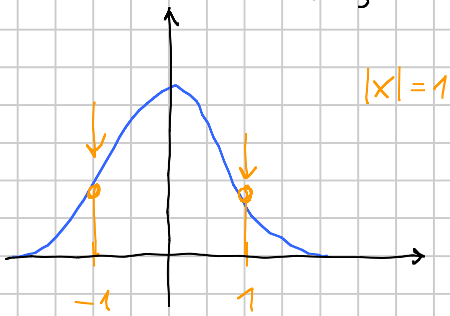




$$E(B_s \mid B_t) = \frac{s}{t} B_t \quad \text{q.c.}$$

→ $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$E(X \mid |X|) = 0$$



☆ Nella definizione i. può essere sostituito da

$$\boxed{\text{i}'.\ Y \text{ è } \mathcal{G}\text{-misurabile}}$$

ora 20

<u>Dim</u> devo far vedere che $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ + i'. + ii. ⇒ i.

ovvero che $Y \in \mathcal{L}^1$

$$E|Y| = E(Y; \underbrace{Y \geq 0}_{\in \mathcal{G}}) - E(Y; \underbrace{Y<0}_{\in \mathcal{G}})$$

$$\overset{\text{ii.}}{=} E(X; Y \geq 0) - E(X; Y<0) \leq 2E|X|$$

▧ PROPRIETÀ (WILLIAMS CAP 9)

(a) $E(E(X \mid \mathcal{G})) = E(X)$

<u>Dim</u> ii. con $G = \Omega \in \mathcal{G}$ $\quad E(X) = E(X; \Omega) = E(E(X \mid \mathcal{G}); \Omega)$
$= E(E(X \mid \mathcal{G}))$

(b) $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{G}, P) \Rightarrow X = E(X \mid \mathcal{G})$ q.c.

per definizione

(c) LINEARITÀ: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-alg

$\tilde{X}, \tilde{Y}$ versioni di $E(X|\mathcal{G})$ e $E(Y|\mathcal{G})$

Allora $\alpha\tilde{X} + \beta\tilde{Y}$ è una versione di $E(\alpha X + \beta Y | \mathcal{G})$

(enunciato modificato ore 21)

Dim i. $\tilde{X}, \tilde{Y} \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ che è uno spazio vettoriale $\to$ ok

ii. $\forall G \in \mathcal{G}$ $E(S \mathbb{1}_G) = \alpha E(\tilde{X}\mathbb{1}_G) + \beta E(\tilde{Y}\mathbb{1}_G)$

$$= \alpha E(X\mathbb{1}_G) + \beta E(Y \mathbb{1}_G) = E((\alpha X + \beta Y)\mathbb{1}_G)$$

lin. di E

(d) POSITIVITÀ: sia $X \geq 0$ q.c.; sia Y una versione di $E(X|\mathcal{G})$

Allora $Y \geq 0$ q.c.

(enunciato modificato ore 21)

Dim $\varepsilon > 0$ $\{Y \leq -\varepsilon\} \in \mathcal{G}$

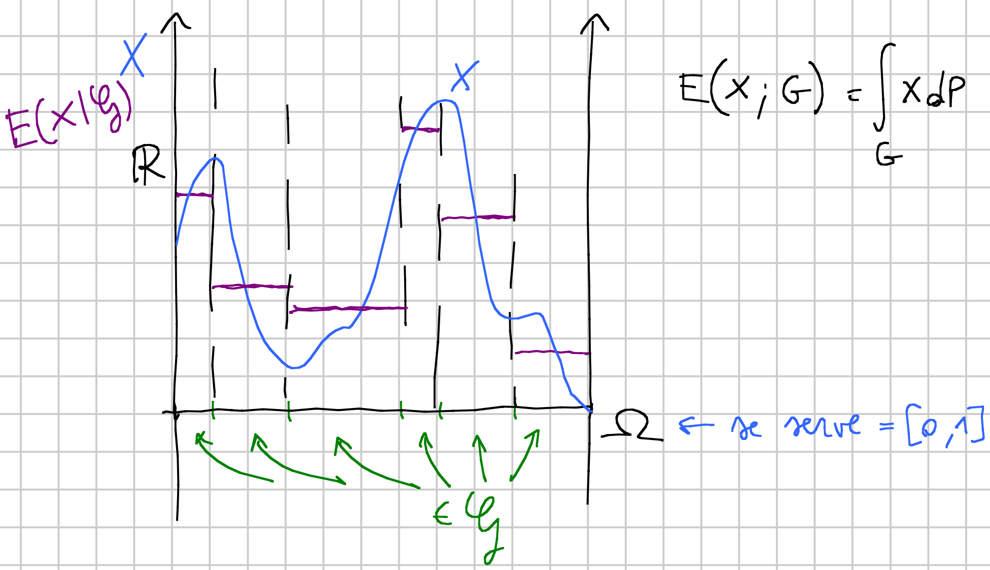
$$0 \leq E(X; Y \leq -\varepsilon) \overset{ii.}{=} E(Y; Y \leq -\varepsilon) = \int_{Y \leq -\varepsilon} Y \, dP \leq -\varepsilon \int_{Y \leq -\varepsilon} dP = -\varepsilon P(Y \leq -\varepsilon)$$

$\Rightarrow P(Y \leq -\varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

faccio l'intersezione per $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

$P(Y < 0) = 0$

HW: perché è sparito l'uguale?



$$E(X; G) = \int_G X \, dP = E(Y; G)$$

PROPRIETÀ SPERANZA CONDIZIONALE (CONTINUA)

(e) Convergenza monotòna condizionale (cMON)

$(X_n)_{n\geq 1}$ $\quad X_n \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ $\quad X_n \geq 0$ q.c. $\quad X_n \leq X_{n+1}$ $\forall n$

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.\, L^1} X := \sup_j X_j \qquad Y_n = E(X_n|\mathcal{G}) \text{ q.c. } \forall n$$

Allora $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.\, L^1} Y := \sup_j Y_j$ e $Y = E(X|\mathcal{G})$ q.c.

(enunciato modificato ora 21)

Dim $\quad Y_{n+1} - Y_n \underset{(c)}{=} E(\underbrace{X_{n+1} - X_n}_{\geq 0 \text{ q.c.}}|\mathcal{G}) \underset{(d)}{\geq} 0$ q.c. $\Rightarrow Y_n \uparrow Y := \sup_j Y_j$

devo dimostrare che $Y = E(X|\mathcal{G})$ q.c.

i. Y è $\mathcal{G}$-misurabile per costruzione (che sia L^1 seguirà)

ii. $\forall G \in \mathcal{G}$ $\quad E(X;G) \overset{?}{=} E(Y;G)$

$0 \leq Y_n \uparrow Y$ il limite è q.c. e in L^1

$0 \leq Y_n \mathbb{1}_G \uparrow Y\mathbb{1}_G$ per il limite L^1

$0 \leq X_n \mathbb{1}_G \uparrow X\mathbb{1}_G$ per il limite L^1

} ottengo

$$\int_\Omega Y\mathbb{1}_G\, dP = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega Y_n \mathbb{1}_G\, dP = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n \mathbb{1}_G\, dP = \int_\Omega X\mathbb{1}_G\, dP \qquad \square$$

(f) Lemma di Fatou condizionale

$(X_n)_{n\geq 1}$ $\quad X_n \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ $\quad X_n \geq 0$ $\forall n$

$$E(\liminf_n X_n|\mathcal{G}) \leq \liminf_n E(X_n|\mathcal{G}) \quad \text{q.c.}$$

HW: Dim

(g) Convergenza dominata condizionale

$(X_n)_{n\geq 1}$ $\quad X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad |X_n| \leq V$ q.c. $\quad V \in L^1$ $\quad \forall n$

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} X$

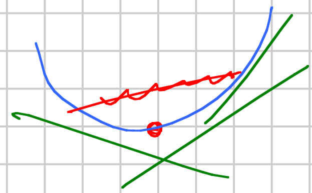
Allora $\quad E(X_n | \mathcal{G}) \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} E(X|\mathcal{G})$

HW: Dim

(h) Disuguaglianza di Jensen condizionale

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa

$X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\qquad \varphi(X) \in L^1$



Allora $\quad \varphi(E(X|\mathcal{G})) \leq E(\varphi(X)|\mathcal{G})$ q.c.

Dim: $\quad L := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a + bx \leq \varphi(x) \ \forall x \in \mathbb{R}\}$

fatto: $\quad \boxed{\varphi(x) = \sup_{(a,b)\in L} (a+bx) \qquad \forall x}$

più precisamente:

$$\boxed{\exists (a_n, b_n) \in L : \forall x \in \mathbb{R} \quad a_n + b_n x \to \varphi(x)}$$

$$a_n + b_n E(X|\mathcal{G}) \overset{(c)}{=} E(a_n + b_n X | \mathcal{G}) \overset{(d)}{\leq} E(\varphi(X)|\mathcal{G}) \quad \text{q.c.}$$

facciamo il $\sup_n$ $\quad \boxed{\varphi(E(X|\mathcal{G})) \leq E(\varphi(X)|\mathcal{G}) \quad \text{q.c.}}$

(i) Proprietà torre

$X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\qquad \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ $\quad \sigma$-algebre

$$E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H}) \quad \text{q.c.}$$

Dim $\quad Y = E(X|\mathcal{G})$ q.c. $\quad Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ $\qquad Z = E(Y|\mathcal{H})$ q.c.

i. $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{H}, P)$ per costruzione

ii. $\forall H \in \mathcal{H}$ $\quad E(X;H) \overset{?}{=} E(Z;H)$

$$E(Z;H) = E(Y;H) \underset{\substack{\uparrow \\ H\in\mathcal{H}\subseteq\mathcal{G} \\ H\in\mathcal{G}}}{=} E(X;H) \qquad \square$$

(j) Portar fuori ciò che è già misurabile

$X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-alg. $\quad Z$ $\mathcal{G}$-misurabile

$ZX \in L^1$ (oppure $ZE(X|\mathcal{G}) \in L^1$). Allora:

$$\boxed{E(ZX|\mathcal{G}) = ZE(X|\mathcal{G}) \text{ q.c.}}$$

Dim $\quad Y = E(X|\mathcal{G})$ q.c.

Voglio dimostrare che ZY è una versione di $E(ZX|\mathcal{G})$

i. ZY è $\mathcal{G}$-misurabile per costruzione

ii. $\forall G \in \mathcal{G}$ $\quad E(ZY;G) \overset{?}{=} E(ZX;G)$

$$E(Z\mathbb{1}_G Y) = E(Z\mathbb{1}_G X)$$

seguirà dal claim $\longrightarrow$ con $W = Z\mathbb{1}_G$

ii.++ claim: $Y = E(X|\mathcal{G})$ q.c. $\quad W$ $\mathcal{G}$-misurabile, $WX \in L^1$ (oppure $WY \in L^1$), allora

$$\boxed{E(WX) = E(WY)}$$

---

ora 20

Dim claim: uso la standard machine

a) $W = \mathbb{1}_G$ $\quad G \in \mathcal{G}$ $\quad$ ok per ii.

b) $W = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{G_n}$ $\quad G_n \in \mathcal{G}$ $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $\quad$ ok per linearità

c) $W \geq 0$ $\mathcal{G}$-misurabile $\quad \exists (W_n)_{n\geq 1}$ t.c.

$W_n \geq 0$ semplice (tipo b)) $\qquad W_n \uparrow W$ q.c.

$X = X^+ - X^-$ $\quad W_n X^\pm \geq 0$ $\quad W_n X^\pm \uparrow W X^\pm$ q.c.

$E(W_n X^\pm) \uparrow E(W X^\pm)$ ← questo è finito

$\quad\quad\quad \|$

$E(W_n Y^\pm) \uparrow E(W Y^\pm)$ ← (oppure questo è finito)

def $Y^\pm = E(X^\pm | \mathcal{G})$ q.c.

$Y^\pm \geq 0$ q.c. per (d)

$Y^+ - Y^- = E(X^+ - X^- | \mathcal{G})$ q.c. per (c)

$\overset{!}{=} E(X|\mathcal{G}) = Y$ q.c.

$Y^\pm$ sono la parte posi e nega di Y q.c.

$$E(WX^\pm) = E(WY^\pm) \Rightarrow E(WX) = E(WY)$$

d) W $\mathcal{G}$-misurabile

$W = W^+ - W^-$ finisco per linearità $\square$

(k) Indipendenza

$X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-alg $\quad \mathcal{G}, X$ indip.

$$\boxed{E(X|\mathcal{G}) = E(X) \quad \text{q.c.}}$$

<u>Dim</u> i. le costanti stanno in $L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$

ii. $\forall G \in \mathcal{G}$ $\quad E(X; G) \overset{?}{=} E(E(X); G) = E(X)P(G)$

X e $\mathbb{1}_G$ sono v.v.aa. indipendenti, quindi (HW)

$E(X\mathbb{1}_G) = E(X)E(\mathbb{1}_G) = E(X)P(G)$ $\square$

(k^{++}) $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-alg $\quad \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ σ-alg.

$\mathcal{H}$ indipendente da $\sigma(\mathcal{G}, \sigma(X))$, allora

$$E(X | \mathcal{G}, \mathcal{H}) := E(X | \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})) = E(X|\mathcal{G}) \quad \text{q.c.}$$

✪ Altre due proprietà nell'ora 25: la prossima volta anticipare!

l) $X_n \xrightarrow{L^p} X$ $\quad p \geq 1 \Rightarrow E(X_n|\mathcal{G}) \xrightarrow{L^p} E(X|\mathcal{G})$

m) $\int_a^b \cdot \, ds$ e $E(\cdot|\mathcal{G})$ commutano

ESISTENZA E UNICITÀ DELLA SPERANZA CONDIZIONALE

- Unicità: se Y e Z sono versioni di $E(X|\mathcal{G})$

  Allora $Y = Z$ q.c.

<u>Dim</u> $Y-Z$ è una versione di $E(0|\mathcal{G})$ per (c)

$0 \geq 0$ e $0 \leq 0$ quindi per (d)

$Y-Z \geq 0$ q.c. e $Y-Z \leq 0$ q.c. $\Rightarrow Y = Z$ q.c.

- Esistenza:

a) Normalmente si deduce dal thm di Radon-Nicodym

$(\Omega, \mathcal{F})$ μ, ν due misure

$\mu \ll \nu$ $\quad (\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0)$

$\Rightarrow \exists f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ $f = \frac{d\mu}{d\nu}$: $\forall A \in \mathcal{F}$ $\mu(A) = \int_A f \, d\mu$

$X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad X = X^+ - X^-$ $\quad X^\pm \geq 0$ q.c.

due misure : P e $\mu^\pm : G \mapsto \mu^\pm(G) := \int_G X^\pm dP$

sono misure su $L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ e $\mu^\pm \ll P$

quindi $\exists f^\pm \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$: $\underset{E(X^\pm; G)}{\underset{\shortparallel}{\mu^\pm(G)}} = \int_G f^\pm dP = E(f^\pm; G)$

b) Altrimenti si fa in due step:

1) $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ per proiezione ortogonale
2) $X \in L^1$ per densità

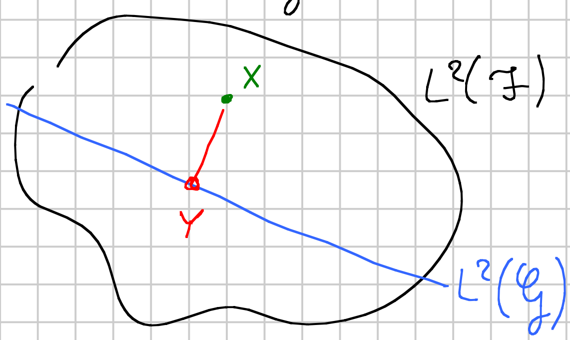
■ Esistenza speranza condizionale (senza Radon-Nycodim)

$X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di Hilbert

$X, Y \in L^2$ $\quad \langle X, Y \rangle_{L^2} = E(\underbrace{XY}_{\in L^1 \text{ per Cauchy-Schwarz}})$

$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sotto σ-alg.

Y è una versione di $E(X \mid \mathcal{G})$ se $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$
e $\forall G \in \mathcal{G}$ $E(X; G) = E(Y; G)$ ovvero $\boxed{\langle X-Y ; 1\!\!1_G \rangle}$



sottospazio vettoriale chiuso (in quanto completo)

Y risulterà la proiez. ortogonale

Dim Sia $h := \inf \{ \|Z - X\|^2 : Z \in L^2(\mathcal{G}) \} \geq 0$
$\exists (Y_n)_{n \geq 1}$ $Y_n \in L^2(\mathcal{G})$: $\|Y_n - X\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} h$
dimostro che è di Cauchy

$\|U-V\|^2 + \|U+V\|^2 = 2\|U\|^2 + 2\|V\|^2$

$$\|Y_m - Y_n\|^2 = \|(Y_m - X) - (Y_n - X)\|^2$$

$$= 2\|Y_m - X\|^2 + 2\|Y_n - X\|^2 - \|Y_m + Y_n - 2X\|^2$$

$$= 2\underbrace{\|Y_m - X\|^2}_{\leq h + \varepsilon} + 2\underbrace{\|Y_n - X\|^2}_{\leq h+\varepsilon} - \underbrace{4\|\underbrace{\tfrac{1}{2}Y_m + \tfrac{1}{2}Y_n}_{\in L^2(\mathcal{G})} - X\|^2}_{\geq h} \leq 4\varepsilon$$

Allora $Y_n \to Y \in L^2(\mathcal{G})$. Devo verificare che $\langle X - Y, 1\!\!1_G \rangle = 0$

$$h \leq \| X - Y + \lambda 1\!\!1_G \|^2 = \underbrace{\|X-Y\|^2}_{= h} + \underbrace{\lambda^2 \underbrace{\|1\!\!1_G\|^2}_{P(G)} + 2\lambda \langle X-Y ; 1\!\!1_G \rangle}_{\text{se } \langle X-Y; 1\!\!1_G\rangle \neq 0 \text{ potrei trovare } \lambda \text{ con } |\lambda| \text{ piccolo t.c. questa espressione } < 0}$$

(check)

- Step 2) $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a meno di $X = X^+ - X^-$

  posso limitarmi al caso $X \geq 0$ q.c.

  $(X_n)_{n\geq 1} \in L^2(\mathcal{F}) \qquad X_n := n \wedge X \qquad X_n \xrightarrow[q.c.]{L^1} X$

  Sia $Y_n = E(X_n \mid \mathcal{G})$ q.c. (per lo step 1)

  Allora $Y_n \overset{L^1}{\underset{q.c.}{\uparrow}} Y := \sup_n Y_n$ e $Y = E(X \mid \mathcal{G})$ (per cMON)

INTEGRALE STOCASTICO

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P) \qquad (B_t)_{t\geq 0}$ BM rispetto a $\mathcal{F}_t$

$0 \leq a < b$ fissati

$$\boxed{I(X) = \int_a^b X_s \, dB_s \in L^2(\Omega)} \qquad \forall X \in M^2_{a,b}$$

$M^2_{a,b}$: processi progressivamente misurabili che sono $L^2(\Omega \times [a,b])$

$= L^2(\Omega \times [a,b]; \mathcal{A}; P \otimes Leb)$

$\mathcal{A}$: σ-alg misteriosa

I sarà un operatore lineare tra $M^2_{a,b}$ e $L^2(\Omega)$

sarà inoltre una isometria (e quindi limitato/continuo)

$$\boxed{\|I(X)\|_{L^2(\Omega)} = \|X\|_{M^2_{a,b}}} \qquad \text{isometria di Itō}$$

N.B. $M^2_{a,b}$ è completo rispetto alla norma che eredita da L^2

$$\boxed{\|X\|^2_{M^2_{a,b}} := E \int_a^b X_t^2 \, dt}$$

- Come si definisce

$S^2_{a,b} \subseteq M^2_{a,b}$ processi semplici $\longrightarrow I : S^2_{a,b} \to L^2(\Omega)$ in modo ovvio

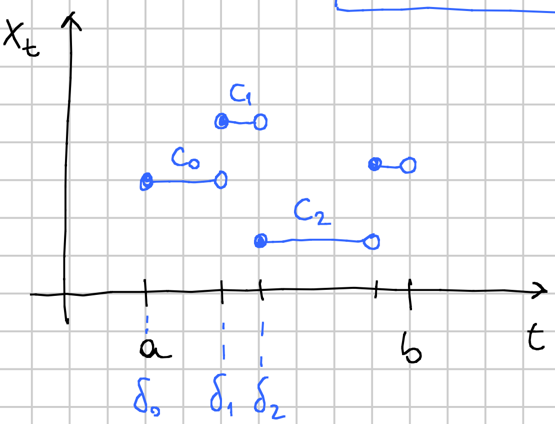
$S^2_{a,b}$ denso in $M^2_{a,b}$ quindi I definito su $M^2_{a,b}$ per densità

- Def $X = (X_t)_{t\in[a,b]}$ si dice semplice se esistono:

i. $\delta \in \Delta_{[a,b]}$ $\quad a = \delta_0 < \delta_1 < \dots < \delta_{N_\delta} = b$

ii. $(C_i)_{i=0,1,\dots,N^\delta-1}$ $\quad C_i \in L^2(\Omega; \mathcal{F}_{\delta_i})$

Tali che: $\boxed{X_t(\omega) = \sum_{i=1}^{N_\delta} C_{i-1}(\omega)\, \mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)}(t)}$ funzione costante a tratti con tempi DETERMINISTICI



$\forall t \in [a,b]$ sia $j : t \in [\delta_{j-1}, \delta_j)$

allora $X_t = C_{j-1}$ q.c. $\mathcal{F}_{\delta_{j-1}} \subseteq \mathcal{F}_t$

X_t è $\mathcal{F}_{\delta_{j-1}}$-misurabile e quindi $\mathcal{F}_t$ misurabile

$\rightarrow$ Ho dimostrato che X è adattato; siccome è anche cont. a DX è progressivamente misurabile

$\rightarrow$ Calcolo $\|X\|^2_{M^2}$

$$E\int_a^b \Big[\sum_{i=1}^{N_\delta} C_{i-1}\mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)}(t)\Big]^2 dt = E\int_a^b \sum_{i=1}^{N_\delta} C_{i-1}^2\, \mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)}(t)\, dt$$

$$= E\sum_{i=1}^{N_\delta} C_{i-1}^2(\delta_i - \delta_{i-1}) = \sum_{i=1}^{N_\delta}(\delta_i - \delta_{i-1})\, E(\underset{\substack{\uparrow\\ L^2(\Omega)}}{C_{i-1}^2}) < \infty$$

★ Ho verificato che $S^2_{a,b} \subseteq M^2_{a,b}$

- Definisco I su $S^2_{a,b}$

$$X \in S^2_{a,b} \qquad X = \sum_{i=1}^{N_\delta} C_{i-1} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)}(t) \qquad C_i \in L^2(\mathcal{F}_{\delta_i})$$

$$\boxed{I(X) := \sum_{i=1}^{N_\delta} C_{i-1}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})}$$

★ vediamo perché

$$I(X) = \int_a^b X_t\, dB_t = \int_a^b \sum C_{i-1} \mathbb{1}_{[\dots)}(t)\, dB_t \overset{\text{sensato}}{=} \sum_i C_{i-1} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} dB_t \overset{\text{sensato}}{=} \sum_i C_{i-1}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})$$

★ va verificata la buona definizione (check)

- I è lineare su $S^2_{a,b}$ (check)

- Isometria di Itō su $S^2_{a,b}$

$$X \in S^2_{a,b} \quad \Rightarrow \quad \|I(X)\|_{L^2} = \|X\|_{M^2}$$

Dim $\quad X = \sum_1^N C_{i-1} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)}$

$$\|I(X)\|^2_{L^2} = E[I(X)^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^N C_{i-1}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})\right)^2\right] =$$

$$E\left[\sum_{i=1}^N C_{i-1}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) \sum_{j=1}^N C_{j-1}(B_{\delta_j} - B_{\delta_{j-1}})\right]$$

a) $E(E(X|\mathcal{G})) = E(X)$

$$= \sum_{i,j} E\left[C_{i-1}C_{j-1}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})(B_{\delta_j} - B_{\delta_{j-1}})\right]$$

$$= \sum_i E\left[C_{i-1}^2 (B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2\right] + 2\sum_{i<j} E\left[C_{i-1}C_{j-1}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})(B_{\delta_j} - B_{\delta_{j-1}})\right]$$

$$= \sum_i E\Big[E\big(\underset{\cap\ L^2(\mathcal{F}_{\delta_{i-1}})}{C_{i-1}^2} (B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2 \,|\, \mathcal{F}_{\delta_{i-1}}\big)\Big] + 2\sum_{i<j} E\Big[E\big(\overbrace{C_{i-1}C_{j-1}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})}^{\mathcal{F}_{\delta_{j-1}}\text{-misur.}}(B_{\delta_j} - B_{\delta_{j-1}}) \,|\, \mathcal{F}_{\delta_{j-1}}\big)\Big]$$

j)   j)

$$= \sum_i E\Big[C_{i-1}^2 E\big((B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2 \,|\, \mathcal{F}_{\delta_{i-1}}\big)\Big] + 2\sum_{i<j} E\Big[C_{i-1}C_{j-1}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) E\big(B_{\delta_j} - B_{\delta_{j-1}} \,|\, \mathcal{F}_{\delta_{j-1}}\big)\Big]$$

indip   uso k)   uso k)   indip

$$= \sum_i E[c_{i-1}^2] \underbrace{E[(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2]}_{\delta_i - \delta_{i-1}} + 2\sum_{i<j} E[c_{i-1}c_{j-1}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})] \underbrace{E(B_{\delta_j} - B_{\delta_{j-1}})}_{0}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (\delta_i - \delta_{i-1}) E[c_{i-1}^2] = \|X\|_{M^2}^2$$

due pagine fa

- Definisco I su $M^2_{a,b}$

☆ do per buona la densità di $S^2_{a,b}$ in $M^2_{a,b}$

$X \in M^2_{a,b}$ $\quad \exists (X^{(n)})_{n \geq 1}$ $\quad X^{(n)} \in S^2_{a,b}$ e $X^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{M^2} X$

$$\boxed{I(X) := L^2 - \lim_{n\to\infty} I(X^{(n)})}$$

Cose da verificare:

1) La definizione ha senso (il limite esiste sempre)

$X^{(n)}$ è di Cauchy quindi lo è anche $I(X^{(n)})$

$$\|I(X^{(n)}) - I(X^{(m)})\|_{L^2} = \|I(X^{(n)} - X^{(m)})\|_{L^2} = \|X^{(n)} - X^{(m)}\|$$

I è lin su $S^2_{a,b}$ $\qquad$ isom di Itô su $S^2_{a,b}$

quindi il limite esiste perché $L^2(\Omega)$ è completo

2) È una definizione univoca

$(\tilde{X}^{(n)})_{n \geq 1}$ un'altra successione come $X^{(n)}$

$$Y = L^2 - \lim_n I(X^{(n)}) \qquad \tilde{Y} = L^2 - \lim_n I(\tilde{X}^{(n)})$$

$$\|Y - \tilde{Y}\|_{L^2} \leq \|Y - I(X^{(n)})\|_{L^2} + \|I(X^{(n)}) - I(\tilde{X}^{(n)})\|_{L^2} + \|I(\tilde{X}^{(n)}) - \tilde{Y}\|_{L^2} \leq 4\varepsilon$$

lin + Itô

$$\|I(X^{(n)}) - I(\tilde{X}^{(n)})\|_{L^2} = \|X^{(n)} - \tilde{X}^{(n)}\|_{M^2} \leq \|X^{(n)} - X\|_{M^2} + \|X - \tilde{X}^{(n)}\|_{M^2} \leq 2\varepsilon$$

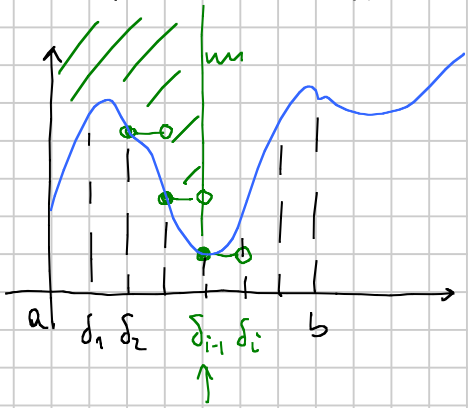
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : n > n_0 \quad \|X^{(n)} - X\|_{M^2} < \varepsilon \quad \|\tilde{X}^{(n)} - X\|_{M^2} < \varepsilon \quad \|Y - I(X^{(n)})\|_{L^2} < \varepsilon \quad \|\tilde{Y} - I(\tilde{X}^{(n)})\|_{L^2} < \varepsilon$

visto che ε è arbitrario, $\|Y - \tilde{Y}\|_{L^2} = 0$, quindi $Y = \tilde{Y}$ q.c. $\square$

■ $S^2_{a,b}$ denso in $M^2_{a,b}$

Thm: $X \in M^2_{a,b}$ $\exists (X^{(n)})_{n\geq 1}$ $X^{(n)} \in S^2_{a,b}$: $X^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{M^2} X$

Dim



$$X^{(n)}_t = \sum_{i=1}^{N} c^{(n)}_{i-1} \mathbb{1}_{[\delta^{(n)}_{i-1}, \delta_i)}(t)$$

$$c^{(n)}_{i-1} \in L^2(\mathcal{F}_{\delta_{i-1}})$$

Con questa definizione non si arriva molto avanti perché le traiettorie non le supponiamo continue

- Definizione vera di $X^{(n)}$: $c^{(n)}_{i-1} = \dfrac{1}{\delta^{(n)}_{i-1} - \delta^{(n)}_{i-2}} \displaystyle\int_{\delta^{(n)}_{i-2}}^{\delta^{(n)}_{i-1}} X_t \, dt$

$\forall \delta \in \Delta_{[a,b]}$ $\quad \pi_\delta : L^2(a,b) \longrightarrow$ costanti a tratti

$$\boxed{\begin{aligned} \pi_\delta f &:= \sum_{i=2}^{N_\delta} c^f_{i-1} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1}, \delta_i)} \\ c^f_i &= \frac{1}{\delta_i - \delta_{i-1}} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} f(s)\, ds \end{aligned}}$$

Notazione $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_{L^2(a,b)}$

- $(\pi_\delta f)_{\delta \in \Delta_{[a,b]}}$ è denso in $L^2(a,b)$

Ovvero $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta \in \Delta_{[a,b]}$: $\|\pi_\delta f - f\|_{L^2(a,b)} \leq \varepsilon$

a) Suppong. f continua

sia $\delta^{(n)}$ una successione con $|\delta^{(n)}| \to 0$

$$\forall t \in [a,b] \quad \left| \pi_{\delta^{(n)}} f(t) - f(t) \right| = \left| c^f_{i-1} - f(t) \right| = \left| \frac{1}{\delta_{i-1} - \delta_{i-2}} \int_{\delta_{i-2}}^{\delta_{i-1}} f(s)\, ds - f(t) \right| = (*)$$

$t \in [\delta^{(n)}_{i-1}, \delta^{(n)}_i)$

f uniformemente continua:

$\forall \varepsilon>0\ \exists \eta>0 : |s-t|<\eta \Rightarrow |f(s)-f(t)|<\varepsilon$

$$(\star) \leq \frac{1}{\delta_{i-1}-\delta_{i-2}} \int_{\delta_{i-2}}^{\delta_{i-1}} |f(s)-f(t)|\, ds \leq \varepsilon$$

Se $|\delta^{(n)}| < \frac{\eta}{2}$ allora $|s-t|<\eta$

Ho dimostrato che $\pi_{\delta^{(n)}} f \longrightarrow f$ puntualmente

Per dimostrare che $\pi_{\delta^{(n)}} f \xrightarrow{L^2} f$ uso (DOM)

$$|(\pi_\delta f)(t)| \leq \max_i |c_i^f| \leq \max_s |f(s)| \in L^2$$

fine a)

b) $f \in L^2(a,b)$ le funz. continue sono dense in $L^2(a,b)$

$$\|\pi_\delta f - f\|_* \leq \|\pi_\delta f - \pi_\delta g\|_* + \|\pi_\delta g - g\|_* + \|g-f\|_*$$

piccolo per a)

piccolo

g continua che approssima f in $L^2(a,b)$

$$\|\pi_\delta f - \pi_\delta g\|_* = \|\pi_\delta(f-g)\|_* \leq \|\pi_\delta\| \cdot \|f-g\|_*$$

π_δ lineare $\qquad$ π_δ continuo

i. π_δ lineare $\quad \alpha,\beta \in \mathbb{R} \quad f,g \in L^2(a,b)$

$$\pi_\delta(\alpha f + \beta g) = \sum_{i=2}^{N} c_{i-1}^{\alpha f+\beta g}\, \mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)} = \alpha \pi_\delta f + \beta \pi_\delta g$$

$$c_i^{\alpha f+\beta g} = \frac{1}{\delta_i-\delta_{i-1}} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} (\alpha f+\beta g)\, ds = \alpha c_i^f + \beta c_i^g$$

ii. π_δ continuo

$$\|\pi_\delta f\|_*^2 := \int_a^b [\pi_\delta f(t)]^2 dt = \sum_{i=2}^{N} (c_{i-1}^f)^2 \underbrace{\int_a^b \mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)}(t)\, dt}_{\delta_i-\delta_{i-1}}$$

$$\left(c_{i-1}^f\right)^2 = \left(\frac{1}{\delta_{i-1}-\delta_{i-2}} \int_{\delta_{i-2}}^{\delta_{i-1}} f(s)\,ds\right)^2 =: \left(E^{i-1} f\right)^2 \le E^{i-1} f^2 = \frac{1}{\delta_{i-1}-\delta_{i-2}} \int_{\delta_{i-2}}^{\delta_{i-1}} f^2(s)\,ds$$

$$\le \sum_{i=2}^{N} \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{\delta_{i-1}-\delta_{i-2}} \int_{\delta_{i-2}}^{\delta_{i-1}} f^2(s)\,ds \le K_\delta \int_a^b f^2(s)\,ds = K_\delta \|f\|_*^2$$

dove ho posto $K_\delta := \max\limits_{i=2,\dots,N} \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{\delta_{i-1}-\delta_{i-2}}$

$\rightarrow$ chiudo b)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad g \in \mathcal{C}(a,b) \; : \; \|g-f\|_* \le \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\delta \in \Delta_{[a,b]} \; : \; K_\delta = 1 \;, \; \|\pi_\delta g - g\|_* \le \frac{\varepsilon}{3}$$

Allora $\|\pi_\delta f - f\|_* \le K_\delta \|f-g\|_* + \|\pi_\delta g - g\|_* + \|g-f\|_* \le \varepsilon$

fine b), fine ●

---

ora 24

● Parte finale

$$X \in M^2_{a,b} \qquad \delta \in \Delta_{[a,b]} \qquad (\pi_\delta X)_t(\omega) := \begin{cases} (\pi_\delta X_\cdot(\omega))_t & X_\cdot(\omega) \in L^2(a,b) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

approssimo X traiettoria per traiettoria

i. $\pi_\delta X \in S^2_{a,b}$ (check)

ii. $\delta^{(n)} \in \Delta_{[a,b]} \; : \; |\delta^{(n)}| \to 0 \quad K_{\delta^{(n)}} = 1$

$X^{(n)} := \pi_{\delta^{(n)}} X$

$\|X\|^2_{M^2} = E\int_a^b X_t^2\,dt = E\|X\|_*^2 < \infty$

$\Rightarrow \|X_\cdot(\omega)\|_* < \infty$ q.c.

$X^{(n)}(\omega) = \pi_{\delta^{(n)}}(X_\cdot(\omega))$ q.c.

$$\pi_{\delta^{(n)}}(X_\cdot(\omega)) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(a,b)} X_\cdot(\omega) \qquad \text{q.o.-}\omega$$

$$\int_a^b \left(X_t^{(n)}(\omega) - X_t(\omega)\right)^2 dt \longrightarrow 0 \quad q.o.-\omega$$

$$\|X^{(n)} - X\|_* \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} 0$$

Vogliamo mostrare che c'è convergenza in $L^2(\Omega)$, quindi serve (DOM)

$$\|X^{(n)} - X\|_* \leq \|X^{(n)}\|_* + \|X\|_* = \|\pi_{\rho(n)}(X_\cdot(\omega))\|_* + \|X_\cdot(\omega)\|_*$$

$$\leq 1 \cdot \|X_\cdot(\omega)\|_* + \|X_\cdot(\omega)\|_* = 2\|X_\cdot(\omega)\|_* \in L^2(\Omega)$$

$$E\left[\|X_\cdot(\omega)\|_*^2\right] = \|X\|_{M^2}^2$$

$\square$

PROPRIETÀ DI I SU $M^2_{a,b}$

LINEARITÀ DI I

$X, Y \in M^2_{a,b}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$I(\alpha X + \beta Y) = ?$

siano $(X^{(n)}, Y^{(n)})_{n\geq 1}$ $\quad X^{(n)}, Y^{(n)} \in S^2_{a,b}$ tali che:

$$X^{(n)} \xrightarrow{M^2} X \quad \Rightarrow \quad I(X^{(n)}) \xrightarrow{L^2} I(X)$$

$$Y^{(n)} \xrightarrow{M^2} Y \quad \Rightarrow \quad I(Y^{(n)}) \xrightarrow{L^2} I(Y)$$

allora:

$$S^2_{a,b} \ni \alpha X^{(n)} + \beta Y^{(n)} \xrightarrow{M^2} \alpha X + \beta Y \Rightarrow I(\alpha X^{(n)} + \beta Y^{(n)}) \xrightarrow{L^2} I(\alpha X + \beta Y)$$

$$I(\alpha X + \beta Y) \xleftarrow[n\to\infty]{L^2} I(\alpha X^{(n)} + \beta Y^{(n)}) \overset{\forall n}{=} \alpha I(X^{(n)}) + \beta I(Y^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \alpha I(X) + \beta I(Y)$$

Continuità di I: Isometria di Itō

$\forall X \in M^2_{a,b}$ $\boxed{\|I(X)\|_{L^2} = \|X\|_{M^2}}$

sia $X^{(n)} \xrightarrow{M^2} X$ $X^{(n)} \in S^2_{a,b}$ $I(X) := L^2\text{-}\lim_n I(X^{(n)})$

$$\|I(X)\|_{L^2} \xleftarrow[n\to\infty]{} \|I(X^{(n)})\|_{L^2} \overset{\forall n}{=} \|X^{(n)}\|_{M^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \|X\|_{M^2}$$

isometria di Itō su $S^2_{a,b}$

Distribuzione di $I(X)$

i. $E(I(X)) = 0$

ii. $Var(I(X)) = \|X\|^2_{M^2}$ (isometria di Itō)

$X = (X_t)_{t\geq 0}$ $I(X) = \int_a^b X_s \, dB_s$ $X \in M^2_{a,b}$

iii. $E(I(X) \mid \mathcal{F}_a) = 0$ q.c.

iv. $E(I(X)^2 \mid \mathcal{F}_a) = \int_a^b E(X_s^2 \mid \mathcal{F}_a) \, ds$ q.c.

Siccome iii $\Rightarrow$ i e iv. $\Rightarrow$ ii dimostro solo iii e iv.
e lo faccio prima su $S^2_{a,b}$

- $X \in S^2_{a,b}$ $X = (X_t)_{t\geq 0}$. Allora $E(I(X) \mid \mathcal{F}_a) = 0$ q.c.

Dim $X = \sum_{i=1}^N C^X_{i-1} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1}, \delta_i)}$ $I(X) := \sum_{i=1}^N C^X_{i-1}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})$

$$E(I(X) \mid \mathcal{F}_a) = \sum_{i=1}^N E(C^X_{i-1}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) \mid \mathcal{F}_a)$$

(i) tower prop

$E(E(X \mid \mathcal{F}) \mid \mathcal{G}) = E(X \mid \mathcal{G})$
$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$

$$= \sum_{i=1}^N E\left(E(C^X_{i-1}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) \mid \mathcal{F}_{\delta_{i-1}}) \mid \mathcal{F}_a\right)$$

esce

$$= \sum_{i=1}^N E\left(C^X_{i-1} \overbrace{E(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}} \mid \cancel{\mathcal{F}_{\delta_{i-1}}})}^{0} \mid \mathcal{F}_a\right)$$

Continuo proprietà $I(X)$, poi lo definiamo come processo $(a=0, b=t)$ poi introduciamo le martingale a tempi continui.

- iv. per $S^2_{a,b}$

$$X \in S^2_{a,b}, \quad X = (X_t)_{t\geq 0} \Rightarrow E(I(X)^2 | \mathcal{F}_a) = \int_a^b E(X_s^2 | \mathcal{F}_a)\, ds \quad q.c.$$

<u>Dim</u> $X = \sum_{i=1}^N c_{i-1}^X \mathbb{1}_{[\delta_{i-1}, \delta_i)}$, $\quad I(X) := \sum_{i=1}^N c_{i-1}^X (B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})$

$$E(I(X)^2 | \mathcal{F}_a) = \sum_{i,j=1}^N E\left(c_{i-1}^X c_{j-1}^X (B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})(B_{\delta_j} - B_{\delta_{j-1}}) \middle| \mathcal{F}_a\right)$$

$$= \sum_{i=1}^N E\left(E\left((c_{i-1}^X)^2 (B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2 \middle| \mathcal{F}_{\delta_{i-1}}\right) \middle| \mathcal{F}_a\right)$$

(check) indipendenti

$$= \sum_{i=1}^N E\left((c_{i-1}^X)^2 (\delta_i - \delta_{i-1}) \middle| \mathcal{F}_a\right) = \sum_{i=1}^N E\left((c_{i-1}^X)^2 \middle| \mathcal{F}_a\right)(\delta_i - \delta_{i-1})$$

$$\int_a^b E(X_s^2 | \mathcal{F}_a)\, ds = \sum_{i=1}^N \int_a^b E\left((c_{i-1}^X)^2 \mathbb{1}_{[\delta_{i-1}, \delta_i)}(s) \middle| \mathcal{F}_a\right) ds$$

$$= \sum_{i=1}^N (\delta_i - \delta_{i-1}) E\left((c_{i-1}^X)^2 \middle| \mathcal{F}_a\right) \qquad \square$$

- Per passare a $M^2_{a,b}$ serve:

<u>Prop</u>: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad (X_n)_{n\geq 1}$, X v.a. $\quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-alg.

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X \quad \text{per } p \geq 1 \quad \text{allora} \quad E(X_n | \mathcal{G}) \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} E(X|\mathcal{G})$$

<u>Dim</u> $\|E(X_n|\mathcal{G}) - E(X|\mathcal{G})\|_{L^p}^p = \|E(X_n - X | \mathcal{G})\|_{L^p}^p$

$$:= E\left[|E(X_n - X|\mathcal{G})|^p\right] \leq E\left[E(|X_n - X|^p | \mathcal{G})\right] = \|X_n - X\|_{L^p}^p$$

Jensen condizionale: $\varphi(x) = |x|^p$ è convessa $\quad \varphi(E(Y|\mathcal{G})) \leq E(\varphi(Y)|\mathcal{G})$

- Dimostro iii. su $M^2_{a,b}$

$X \in M^2_{a,b}$, $X = (X_t)_{t \geq 0}$ $\qquad E(I(X) | \mathcal{F}_a) = 0$ q.c.

Dim $\quad X^{(n)} \xrightarrow{M^2} X \qquad X^{(n)} \in S^2_{a,b} \qquad I(X) := L^2\text{-}\lim I(X^{(n)})$

$$I(X^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} I(X) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{E(I(X^{(n)}) | \mathcal{F}_a)}_{\parallel \; 0 \text{ q.c.}} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \underbrace{E(I(X) | \mathcal{F}_a)}_{= 0 \text{ q.c.}}$$

- Per fare la iv. serve che $\int_a^b \cdot \, ds$ e $E(\cdot | \mathcal{G})$ commutano

Prop: $V = (V_s)_{s \in I}$ $\quad I$ intervallo di $\mathbb{R}$

$V \in L^1(\Omega \times I ; \mathcal{F} \otimes \mathcal{B} ; P \otimes Leb)$ (cautelativo: forse è vero più in generale)

$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-alg.

Allora: $E\left(\int_I V_s \, ds \,\middle|\, \mathcal{G}\right) = \int_I E(V_s | \mathcal{G}) \, ds$ q.c.

Dim: wlog $V \geq 0$ q.c.

Q: sono definiti questi oggetti?

$E \int_I V_s \, ds = \|V\|_{L^1(\dots)} < \infty$ $\qquad$ LHS ben def

$\qquad \| \; = \int_I E V_s \, ds \Rightarrow V_s \in L^1(\Omega)$ Leb-q.o. s $\qquad E(V_s | \mathcal{G})$ ben def

Q: $E(V_s | \mathcal{G})$ ha la misurabilità giusta rispetto $\int_I \cdot \, ds$?

Uso la definizione:

i. $\int_I E(V_s | \mathcal{G}) \, ds$ è $\mathcal{G}$-mis per definizione

ii. $G \in \mathcal{G}$

$$E\left(\mathbb{1}_G \int_I E(V_s | \mathcal{G}) \, ds\right) = \int_I E(\mathbb{1}_G V_s) \, ds = E\left(\mathbb{1}_G \int_I V_s \, ds\right) \qquad \square$$

• Dimostro iv. su $M^2_{a,b}$

$X \in M^2_{a,b}$, $X = (X_t)_{t\geq 0}$

$$\boxed{E(I(X)^2 | \mathcal{F}_a) = \int_a^b E(X_s^2 | \mathcal{F}_a)\, ds \quad q.c.}$$

Dim $X^{(n)} \xrightarrow{M^2} X$ $\quad X^{(n)} \in S^2_{a,b}$ $\quad I(X) := L^2\text{-}\lim I(X^{(n)})$

$$I(X^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} I(X) \Rightarrow I(X^{(n)})^2 \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} I(X)^2$$

(ora 27)

$$\Rightarrow E(I(X^{(n)})^2 | \mathcal{F}_a) \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} E(I(X)^2 | \mathcal{F}_a)$$

$$\| $$

commutano

$$\int_a^b E((X_s^{(n)})^2 | \mathcal{F}_a)\, ds = E\left(\int_a^b (X_s^{(n)})^2 ds \,\Big|\, \mathcal{F}_a \right)$$

---

ora 26

(rifatto audio ora 27)

★ $X^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{M^2} X$ allora

$$\boxed{\int_a^b (X_s^{(n)})^2 ds \xrightarrow{L^1(\Omega)} \int_a^b X_s^2\, ds}$$

$M^2_{a,b} = L^2(\Omega \times [a,b]; \mathcal{H}; P \otimes Leb)$

$$(X^{(n)})^2 \xrightarrow{L^1(\Omega\times[a,b])} X^2$$

$$E\left| \int_a^b (X_s^{(n)})^2 ds - \int_a^b X_s^2 ds \right| \leq E \int_a^b \left| (X_s^{(n)})^2 - X_s^2 \right| ds = \| (X^{(n)})^2 - X^2 \|_{L^1(\Omega\times[a,b])} \to 0 \quad \square$$

perciò $\int_a^b (X_s^{(n)})^2 ds \xrightarrow{L^1(\Omega)} \int_a^b X_s^2 ds \Rightarrow$ vero anche se applico $E(\cdot | \mathcal{F}_a)$

Quindi chiudo : $E(I(X^{(n)})^2 | \mathcal{F}_a) \xrightarrow{L^1} E\left(\int_a^b X_s^2 ds \,\Big|\, \mathcal{F}_a \right)$ $\square$

■ Conseguenze notevoli della isometria di Itô

1) $X, Y \in M^2_{a,b}$ $\qquad I(X), I(Y) \in L^2(\Omega)$

$$\langle I(X), I(Y)\rangle_{L^2} = E\left[I(X)I(Y)\right] = \mathrm{Cov}\left(I(X); I(Y)\right) = \langle X; Y\rangle_{M^2_{a,b}}$$

<u>Dim</u> $\quad I$ è una isometria

$$\|I(X+Y)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|I(X)+I(Y)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|I(X)\|^2_{L^2} + \|I(Y)\|^2_{L^2} + 2\langle I(X), I(Y)\rangle_{L^2}$$

$$\|$$

$$\|X+Y\|^2_{M^2} = \|X\|^2_{M^2} + \|Y\|^2_{M^2} + 2\langle X, Y\rangle_{M^2}$$

2) I è paradossalmente iniettivo

$X, Y \in M^2_{a,b}$ $\qquad I(X) = I(Y)$ q.c. $\Rightarrow \|I(X) - I(Y)\|_{L^2(\Omega)} = 0$

$\Rightarrow \|X - Y\|_{M^2} = 0 \quad \Rightarrow X = Y \quad P\otimes Leb$ - q.o. (ω, t)

■ Integrale stocastico come processo

$I : I_{0,t}$ $\quad t$ variabile $\in [0,T]$ $\qquad T<\infty$ deterministico

★ $X \in M^2_{0,T} \implies X \in M^2_{a,b} \quad \forall\ 0 \leq a < b \leq T$ $\qquad$ (check)

★ se ho $0 \leq a < b < c \leq T$ allora $\displaystyle\int_a^b X_s\,dB_s + \int_b^c X_s\,dB_s = \int_a^c X_s\,dB_s$ q.c.

(HW, oppure ora 24 anno scorso)

$$\longrightarrow \quad \boxed{I(X) = \left(I_t(X)\right)_{t\in[0,T]}} \quad \text{dove} \quad \boxed{I_t(X) = I_{0,t}(X) = \int_0^t X_s\,dB_s}$$

★ Per ogni $t \in [0,T]$ $\quad I_t(X) := L^2$-lim "roba"

quindi $\forall t$ $\quad I_t(X)$ è definito per q.o. ω

ovvero $\quad I(X)$ è definito a meno di modificazioni

★ Dimostreremo che $\exists!$ modificazione continua.

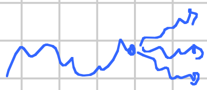
MARTINGALE

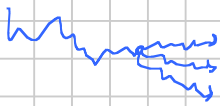
A tempi discreti	A tempi continui
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, P)$ $\quad X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ $\quad X = (X_t)_{t\geq 0}$

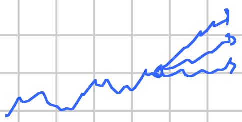
- def: X è una martingala rispetto alla filtrazione assegnata se:

i. X è adattato	i. X adattato
ii. $X_n \in L^1(\Omega)$ $\forall n \in \mathbb{N}$	ii. $X_t \in L^1(\Omega)$ $\forall t \geq 0$
iii. $E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$ q.c. $\forall n$	
$\Leftrightarrow E(X_n \mid \mathcal{F}_m) = X_m$ q.c. $\forall m < n$	iii. $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$ q.c. $\forall s < t$
$\Leftrightarrow E(X_n - X_m \mid \mathcal{F}_m) = 0$ q.c. $\forall m < n$	$\Leftrightarrow E(X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s) = 0$ q.c. $\forall s < t$

- def: X è una supermartingala (sottomartingala) se valgono i. e ii. e iii. con $\leq$ al posto di $=$ (con $\geq$ al posto di $=$)

$=$ m-gala 

$\leq$ super-m 

$\geq$ sotto-m 

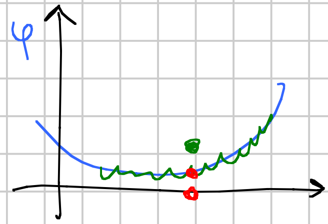
- se X m-gala $E(X_t) = E(X_0)$ $\forall t$ $\quad$ (super m: $E(X_t) \leq E(X_0)$, sotto m: $\dots \geq$)
- se X m-gala $(X_t - X_0)_{t\geq 0}$ è ancora m-gala ed è uscente da 0
- se la filtrazione non è specificata, si intende quella naturale $\rightarrow$ la i. è gratis (ma la iii. no!)

☆ Se X è m-gala e φ è una funzione convessa, $\varphi(X)$ è una sottomartingala (ammesso che $\varphi(X_t) \in L^1$ $\forall t$)

Dim i. φ è continua $\Rightarrow \varphi(X_t)$ è $\mathcal{F}_t$-misurabile

ii. per ipotesi

iii. $E(\varphi(X_t)|\mathcal{F}_s) \overset{?}{\geq} \varphi(X_s)$ $\quad s<t$



per Jensen condizionale

$$E(\varphi(X_t)|\mathcal{F}_s) \geq \varphi(E(X_t|\mathcal{F}_s)) \overset{X \text{ m-gale}}{=} \varphi(X_s) \quad \text{q.c.}$$

Sistemiamo due cose dell'ora 25/26

- Se X_n converge in L^2, X_n^2 converge in L^1
  (HW: come si fa con L^p $p>1$?)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad (X_n)_{n\geq 1}$ $\quad X_n, X \in L^2(\Omega)$ $\quad \forall n \geq 1$

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} X \quad \Rightarrow \quad X_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} X^2$$

Dim
$$|X_n^2 - X^2| = |(X_n - X)^2 + 2X(X_n - X)| \leq (X_n - X)^2 + 2|X(X_n - X)|$$
$$= \underbrace{(|X| + \underbrace{|X_n - X|}_{\downarrow L^2 \; 0})^2}_{=: Y_n \xrightarrow{L^2} |X|} - X^2$$

$$E|X_n^2 - X^2| \leq E(Y_n^2) - E(X^2) \qquad \forall n \geq 1$$
$$\limsup_{n\to\infty} E|X_n^2 - X^2| \leq \limsup_{n\to\infty} \|Y_n\|_{L^2}^2 - \|X\|_{L^2}^2 = 0 \qquad \square$$

ESEMPI DI MARTINGALE

- Passeggiata aleatoria

$(X_n)_{n\geq 1}$ $\quad X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad E(X_n) = 0$ $\quad (X_n)_{n\geq 1}$ indipendenti

$S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ è una martingala uscente da 0 (check)

→ Si chiama davvero p.a. (random walk) se le X_n sono iid.

→ $X_n = \pm \frac{1}{n}$ con prob $\frac{1}{2}$

$\sum_{i=1}^n \pm \frac{1}{i}$ converge per $n \to \infty$ (q.c. e in L^2)
segni random (vedi Williams)

- Martingala moltiplicativa

$(X_n)_{n\geq 1}$ $\quad X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad X_n \geq 0$ q.c. $\quad E(X_n) = 1$ $\quad (X_n)_{n\geq 1}$ indip.

$M_n := \prod_{i=1}^{n} X_i$ è una martingala non negativa uscente da 1

(check: attenzione che $X_1, X_2 \in L^1 \not\Rightarrow X_1 X_2 \in L^1$ in generale, però...)

→ Ad esempio se $X_n = 0, 2$ con prob $\frac{1}{2}$ viene il montepremi del "lascia o raddoppia"

- Aumento della conoscenza

$X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ oppure $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtrazione

$Y_n := E(X \mid \mathcal{F}_n)$ $\qquad\qquad$ $Y_t := E(X \mid \mathcal{F}_t)$

è una martingala: verifico

i. è adattato per definizione

ii. Y_n e Y_t sono $L^1(\Omega)$ per definizione

iii. $E(Y_t \mid \mathcal{F}_s) = E(E(X \mid \mathcal{F}_t) \mid \mathcal{F}_s) \underset{\text{"torre"}}{=} E(X \mid \mathcal{F}_s) =: Y_s$ q.c. $\quad s<t$

→ in verità $Y_n \xrightarrow[\text{q.c.}]{L^1} X$ ovvero Y_n è una approssimazione sempre migliore di X al crescere della mia conoscenza

- Moto Browniano

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ $\qquad B = (B_t)_{t\geq 0}$ BM rispetto a $\mathcal{F}_t$

Allora B è una martingala rispetto a $\mathcal{F}_t$

i. è adattato per def.

ii. $B_t = B_t - B_0 \sim \mathcal{N}(0, t) \in L^1$ $\qquad \forall t > 0$

iii. $s<t$ $\quad E(\underbrace{B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s}_{\text{indip. per def}}) = E(B_t - B_s) = 0$ q.c.

- $B_t^2 - t$ è una martingala

stesse ipotesi di prima $\quad B$ è m-gala, B^2 è sotto-m non neg

$s<t \qquad E(B_t^2 - B_s^2 \mid \mathcal{F}_s) \geq 0$ q.c.

$$E(B_t^2 - B_s^2 \mid \mathcal{F}_s) = E\left(\left[B_s + (B_t - B_s)\right]^2 - B_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right)$$

$$= E\left(2B_s(B_t - B_s) + (B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right) \underset{\uparrow}{=} E\left((B_t - B_s)^2\right) = t - s \geq 0$$

(check)

quindi se pongo $M_t := B_t^2 - t \qquad E(M_t - M_s \mid \mathcal{F}_s) = 0$ q.c.

$\longrightarrow$ più in generale se X è m-gala L^2 allora

$X_t^2 - \langle X \rangle_t$ è una m-gala

variazione quadratica

NB $\boxed{\langle B \rangle_t = t}$

---

ora 28

- Martingala esponenziale (caso BM)

stesse ipotesi di prima :

$\forall \lambda \neq 0 \qquad e^{\lambda B_t}$ è sotto-m non negativa

$\boxed{e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t}}$ è una m-gala non neg. uscente da 1

(HW : dim ora 25 anno scorso)

- Integrale stocastico

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P) \qquad B \text{ BM} \qquad T > 0 \qquad X \in M^2_{0,T}$

$I_t(X)$ è m-gala L^2

$$I_t(X) := \int_0^t X_s \, dB_s := I_{0,t}(X)$$

i. $a=0$, $b=t$ $\quad X\in M^2_{0,t}$ $\quad X^{(n)}\in S^2_{0,t}$ $\quad X^{(n)}\xrightarrow{M^2}X$

$I_{0,t}(X^{(n)})\xrightarrow{L^2}I_{0,t}(X)$ $\quad X^{(n)}=\sum_{i=1}^{N^{(n)}}C^{(n)}_{i-1}\mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)}$ $\quad \delta=\delta^{(n)}$

$\overset{\shortparallel}{\sum_{i=1}^{N^{(n)}}C^{(n)}_{i-1}(B_{\delta_i}-B_{\delta_{i-1}})}$ $\quad \mathcal{F}_{\delta_{i-1}}$ - misurabili

$\delta\in\Delta_{0,t}$ $\quad \delta_{i-1}\le t$ $\quad \mathcal{F}_{\delta_{i-1}}\subseteq\mathcal{F}_t$

$I_{0,t}(X^{(n)})$ $\mathcal{F}_t$ - misurabile $\forall n$ $\Rightarrow$ $I_{0,t}(X)$ $\mathcal{F}_t$ - mis $\square$

ii. $I_t(X)\in L^2(\Omega)\subseteq L^1(\Omega)$ ok

iii. $s<t$ $\quad E\left(I_t(X)-I_s(X)\,|\,\mathcal{F}_s\right)=E\left(I_{s,t}(X)\,|\,\mathcal{F}_s\right)=0$ q.c.

(oss 26) $\quad$ (oss 25 iii.)

- $I_t(X)^2-\int_0^t X_u^2\,du$ è una martingala

stesse ipotesi di prima $\quad I_t(X)^2$ è sotto-m non neg usc. da 0

$s<t$

$$E\left(I_t(X)^2-I_s(X)^2\,|\,\mathcal{F}_s\right)=E\left(\left[I_s(X)+I_{s,t}(X)\right]^2-I_s(X)^2\,|\,\mathcal{F}_s\right)$$

$$=2E\left(I_s(X)\,I_{s,t}(X)\,|\,\mathcal{F}_s\right)+E\left(I_{s,t}(X)^2\,|\,\mathcal{F}_s\right)=0+\int_s^t E\left(X_u^2\,|\,\mathcal{F}_s\right)du$$

(oss 25 iii. e iv.)

$M_t:=I_t(X)^2-\int_0^t X_u^2\,du$ è una m-gala

$$E\left(M_t-M_s\,|\,\mathcal{F}_s\right)=E\left(I_t(X)^2-I_s(X)^2-\int_s^t X_u^2\,du\,\Big|\,\mathcal{F}_s\right)$$

$$=E\left(I_t(X)^2-I_s(X)^2\,|\,\mathcal{F}_s\right)-E\left(\int_s^t X_u^2\,du\,\Big|\,\mathcal{F}_s\right)=0\ \text{q.c.}$$

$\boxed{\text{VII}}$ TEMPI D'ARRESTO

rappresenta un tempo aleatorio "sincrono" rispetto ad una filtrazione

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$	$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$
τ v.a. a valori in $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$	τ v.a. a valori in $[0, +\infty]$

- **Def** τ è un tempo d'arresto rispetto alla filtrazione se

$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \geq 0$	
$\Updownarrow$	
$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \geq 0$	$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$c_n^\tau := \mathbb{1}_{\tau > n}$ è adattato	$c_t^\tau := \mathbb{1}_{\tau > t}$ è adattato

(check $\Leftrightarrow$)

Una ampia famiglia di tempi d'arresto è data dagli hitting time

- **Def** $X = (X_t)_{t\geq 0}$ oppure $X = (X_n)_{n\geq 0}$ un processo stocastico a valori in uno spazio metrico E e sia $A \subseteq E$

  Allora τ_A è hitting time di A per X se

$\tau_A := \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$	$\tau_A := \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}$

- **Prop**: hitting time $\Rightarrow$ stopping time (t.d.a.)

se X è adattato τ_A è un t.d.a.	se X è continuo e adattato e A è chiuso allora τ_A è un t.d.a.

Dim (discreto): fisso $n \geq 0$

$$\{\tau_A \leq n\} = \{\exists j \leq n : X_j \in A\} = \bigcup_{j=0}^{n} \underbrace{\{X_j \in A\}}_{\in \mathcal{F}_j \text{ (} X \text{ adattato)}} \in \mathcal{F}_n$$

Dim (continuo) :

(TEST ? + trovare errore dispense)

se X è cont. a destra e adattato ; A aperto ; $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ continua a destra

$\left(=: \ \forall t \geq 0 \quad \mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s \right)$

Allora τ_A è t.d.a.

Andiamo verso la disuguaglianza massimale di Doob

- Integrale stocastico discreto

$$\int_a^b X_s \, dB_s \approx \sum_i X_{\delta_{i-1}} (B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})$$

X_s: adattato + ... ; B_s: moto browniano (martingala)

Def Su $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ sia M processo adattato e X adattato. Si definisce $Y = X \bullet M$:

$$\boxed{\begin{cases} Y_n := \sum_{i=1}^{n} X_{i-1}(M_i - M_{i-1}) & n \geq 1 \\ Y_0 := 0 \end{cases}}$$

$\star$ Y allora è adattato

Prop se M è m-gale $X \bullet M$ è m-gale

se M è super/sotto m e X è limitato, $X \bullet M$ è super/sotto m

Dim: i. Y è adattato?

$n \geq 1$ $\qquad Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_{i-1} (M_i - M_{i-1}) \longleftarrow \mathcal{F}_n$-mis

X_{i-1}: $\mathcal{F}_{i-1}$-mis $\subseteq \mathcal{F}_n$; $(M_i - M_{i-1})$: $\mathcal{F}_i$-mis $\subseteq \mathcal{F}_n$

ii. $$E\left(X_{i-1}(M_i - M_{i-1}) \mid \mathcal{F}_{i-1}\right) \overset{?}{\underset{(j)}{=}} \underbrace{X_{i-1} E(\underbrace{M_i - M_{i-1}}_{\in L^1} \mid \mathcal{F}_{i-1})}_{}$$

$$E(M_i - M_{i-1} \mid \mathcal{F}_{i-1}) \overset{M \text{ mg}}{=} 0 \text{ q.c.} \longrightarrow 0 \in L^1$$

$$\Rightarrow X_{i-1}(M_i - M_{i-1}) \in L^1 \quad \forall i \geq 1$$

$$E|Y_n| \leq \sum_{i=1}^{n} E\left(\left|X_{i-1}(M_i - M_{i-1})\right|\right) < \infty \qquad Y_n \in L^1 \ \forall n$$

iii. $$E(Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E\left(Y_{n-1} + X_{n-1}(M_n - M_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)$$

$$= E(Y_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) + E\left(X_{n-1}(M_n - M_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)$$

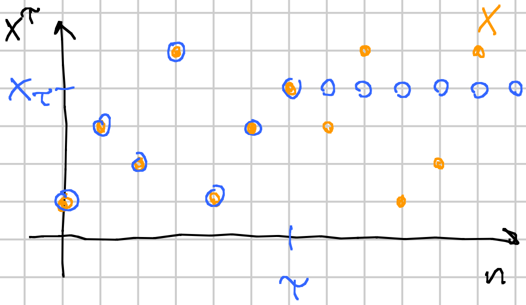
$$= Y_{n-1} + 0 \qquad q.c.$$

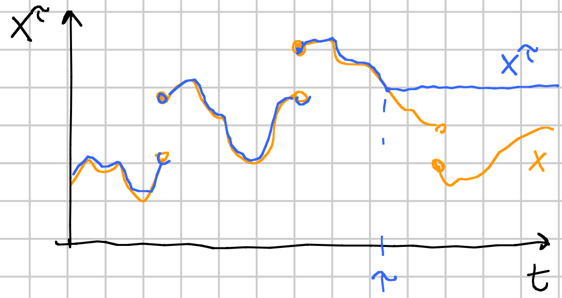
HW: super/sotto-m con X limitato

- Processi arrestati

<u>Def</u> X processo adattato τ t.d.a. il processo X arrestato al tempo τ è X^τ

$$X^\tau_n := X_{\tau \wedge n} \qquad\qquad X^\tau_t := X_{\tau \wedge t}$$





ora 30

— DA QUI CI LIMITIAMO AL CASO DISCRETO —

☆ X^τ è un processo adattato, in particolare $\boxed{X^\tau = C \bullet X + X_0}$ 1) con C definito così:

$$C_n := \mathbb{1}_{n < \tau}$$

1) $$(C \bullet X)_n := \sum_{i=1}^{n} C_{i-1}(X_i - X_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{i-1 \leq \tau-1}(X_i - X_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n \wedge \tau}(X_i - X_{i-1}) = X_{n\wedge\tau} - X_0 \quad q.c. \qquad i = 1, 2, \dots, \tau \text{ vale } 1$$

$$\Rightarrow (C \bullet X)_n + X_0 = X_{n \wedge \tau} = X^\tau_n \quad q.c. \qquad \Rightarrow X^\tau = C \bullet X + X_0$$

2) C è adattato : $\forall n \geq 0$ C_n è $\mathcal{F}_n$-mis

C_n $\mathcal{F}_n$-mis $\iff \{n < \tau\} \in \mathcal{F}_n \iff \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ ok

τ tda

<u>Cor.</u> X m-gala (super/sotto) e τ tda.
allora X^τ è una m-gala (super/sotto)

- OPTIONAL STOPPING THEOREM (DOOB)

X supermartingala (sotto) τ tda. $\tau < \infty$ q.c.

a) $X_n^\tau \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} X_\tau$

b) supponiamo valga una di queste:

i. τ limitato

ii. $E(\tau) < \infty$, $\exists K > 0 : |X_n - X_{n-1}| \leq K$ $\forall n$ q.c.

iii. X limitato

Allora

$$\boxed{E(X_\tau) \leq E(X_0)} \qquad \left(\overset{\text{sotto m.}}{E(X_\tau) \geq E(X_0)} \right)$$

★ Se X è martingala, viene con $E(X_\tau) = E(X_0)$

<u>Dim</u> a) $X_n^\tau = X_{n\wedge\tau}$ fisso $\omega \in \Omega$: $\tau(\omega) < \infty$

Allora $X_n^\tau(\omega) = X_{n \wedge \tau(\omega)}(\omega) \equiv X_{\tau(\omega)}(\omega)$ $\forall n \geq \tau(\omega)$

$$\lim_{n\to\infty} X_n^\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega) \qquad \square$$

Q + HW : $X_\tau : \omega \longmapsto X_{\tau(\omega)}(\omega)$ è una v.a.?

b) Se dimostro che $X_n^\tau \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} X_\tau$ allora

siccome X^τ superm.

$$E(X_\tau) = \lim_{n\to\infty} E(X_n^\tau) \leq \liminf_{n\to\infty} E(X_0) = E(X_0)$$

Verifico la convergenza L^1

i. $\exists T > 0 : \tau \leq T$ q.c.

allora $X_n^\tau = X_{n \wedge \tau}$ è costante per $n \geq T$

$\Rightarrow$ convergenza in L^1

iii. $\tau < \infty$ q.c. $\exists K > 0 : |X_n| \leq K \ \forall n$ q.c.

allora $|X_n^\tau| \leq K \ \forall n$ q.c.

$\Rightarrow$ convergenza dominata e quindi in L^1

ii. $X_n^\tau = X_0 + (C \bullet X)_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n \wedge \tau} (X_i - X_{i-1})$

$$|X_n^\tau| \leq |X_0| + \sum_{i=1}^{n \wedge \tau} \underbrace{|X_i - X_{i-1}|}_{\leq K} \leq |X_0| + K(n \wedge \tau) \leq |X_0| + K\tau$$

$E(\tau) < \infty \quad \Rightarrow (X_n^\tau)_n$ è dominata da $|X_0| + K\tau \in L^1$

$\Rightarrow$ convergenza dominata e quindi in L^1 $\square$

★ domani no lezione

• $X = (X_n)_{n\geq 1}$ processo stocastico $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (non serve adattato)

τ v.a. a valori in $\mathbb{N}$ (non serve t.d.a.)

Allora $X_{\tau(\omega)}(\omega)$ è una v.a.

<u>Dim</u> $\forall \omega \in \Omega \quad Y(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega)$

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$Y^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X_{\tau(\omega)}(\omega) \in B\}$$
$$= \bigsqcup_{n\geq 1} \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) = n, \ X_n(\omega) \in B\}$$
$$= \bigcup_{n\geq 1} \Big(\underset{\in \mathcal{F}}{\tau^{-1}(n)} \cap \underset{\in \mathcal{F}}{X_n^{-1}(B)}\Big) \in \mathcal{F}$$

★ Approccio Baldi: $\omega \overset{\alpha}{\mapsto} (\omega, \tau(\omega)) \qquad (\omega, n) \overset{\beta}{\mapsto} X_n(\omega)$

$Y = \beta \circ \alpha \qquad \alpha, \beta$ sono misurabili (check)

HW: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}, P)$ X adattato $\tau < \infty$ q.c. t.d.a.
Allora X_τ è $\mathcal{F}_\tau$ misurabile dove :

• <u>Def</u> $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}, P)$ oppure $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$
sia τ t.d.a. $\tau < \infty$ q.c.
Si definisce la σ-alg $\mathcal{F}_\tau$

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : \forall n \geq 1 \quad A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$$

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : \forall t \geq 0 \quad A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

- Optional stopping thm caso iv.

X <u>supermg</u> (non sotto!) $\tau < \infty$ q.c. tale.
allora basta:

iv. $X \geq 0$ q.c.

<u>Dim</u> $X_n^\tau \xrightarrow[n \to \infty]{q.c.} X_\tau$

lemma di Fatou:
$Y_n \geq 0$ q.c. $\forall n$
$E(\liminf_n Y_n) \leq \liminf_n E(Y_n)$

$$E(X_\tau) = E(\liminf_n X_n^\tau) \leq \liminf_n E(X_n^\tau) \leq E(X_0)$$

X^τ sup mg
$E(X_n^\tau) \leq E(X_0^\tau)$

- Optional stopping thm: estensione a bound meno restrittivi

ii.' $E(\tau) < \infty$ $\exists k > 0 : |X_n - X_{n-1}| \leq k$ $\forall n \leq \tau$ q.c.
iii.' $\exists K > 0 : |X_n| \leq K$ $\forall n \leq \tau$ q.c.

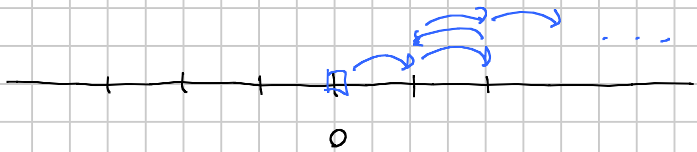
<u>Dim</u> X sup mg X^τ sup mg
se per X valgono ii' o iii' allora per X^τ
valgono ii o iii
Posso allora applicare o. stop. t. a X^τ

$$E(X_\tau) = E(X_\tau^\tau) \leq E(X_0^\tau) = E(X_0)$$

SEMPLICI APPLICAZIONI

Sia S_n una passeggiata aleatoria semplice simmetrica

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad X_i \text{ i.i.d.} \qquad P(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2} \qquad S_0 := 0$$



(1) $a, b \in \mathbb{N}$ consideriamo i punti $-a$ e $+b$
quanto vale la prob che S_n arrivi in b prima che in $-a$? Sia $\pi := P(\exists n \geq 1 : S_n = b, S_j > -a \ \forall j \leq n)$

$\rightarrow$ τ_A hitting time di $A := \{-a, b\}$

τ_A t.d.a. rispetto alla filtraz naturale di S

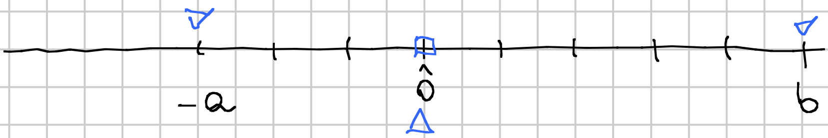
siccome $E(X_i) = 0$, S è una mg

HW: $\tau_A < \infty$ q.c.

applico o.stop.t. iii' (è limitata in $[-a; b]$)

$$0 = E(S_0) = E(S_{\tau_A}) = -a \underbrace{P(S_{\tau_A} = -a)}_{1-\pi} + b \underbrace{P(S_{\tau_A} = b)}_{\pi}$$

$$a - a\pi = b\pi \qquad \boxed{\pi = \frac{a}{a+b}} \qquad \boxed{1 - \pi = \frac{b}{a+b}}$$



② Stessa situazione: quanto impiega S ad arrivare ad una barriera? $E(\tau_A) = ?$

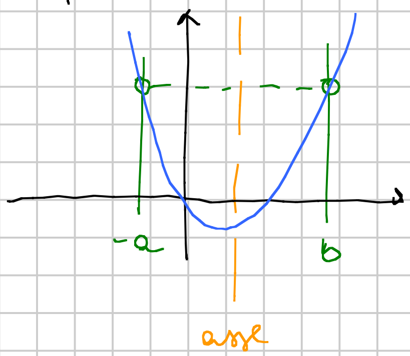
S_n mg., $S_n^2 - n$ mg. (check)

$M_n := \alpha S_n + \beta(S_n^2 - n)$ mg. (check)

Voglio scegliere α e β in modo da conoscere M_τ
Possibilmente vorrei M_τ costante

$$M_\tau = \beta S_\tau^2 + \alpha S_\tau - \beta\tau$$

basta scegliere β, α in modo che la parabola $\beta y^2 + \alpha y$ abbia il medesimo valore per $y = -a, b$



$$-\frac{\alpha}{2\beta} = \frac{b-a}{2} \iff \alpha = -\beta(b-a)$$

$$\beta = 1 \quad \alpha = (a-b)$$

$$M_\tau = S_\tau^2 + (a-b)S_\tau - \tau \overset{!}{=} \underbrace{(S_\tau + a)(S_\tau - b)}_{=0} + ab - \tau$$

$M_\tau = ab - \tau$

o.stop.t. con ipotesi ii!

HW: $E(\tau) < \infty$

S_n ha incremento $|S_n - S_{n-1}| = |X_n| = 1$

$S_n^2 - n$ ha incremento

$$|\underset{S_{n-1}+X_n}{S_n^2} - n - S_{n-1}^2 + n - 1| = |2X_nS_{n-1} + \overbrace{X_n^2 - 1}^{=0}| \leq 2|S_{n-1}| \text{ limitato}$$

se considero $n \leq \tau$

$\Rightarrow \quad 0 = E(M_0) = E(M_\tau) = ab - E(\tau)$

$$\boxed{E(\tau) = ab}$$

★ $a = b = m$

S_n per arrivare a distanza m impiega mediamente m^2

(3) Quanto tempo impiega in media una scimmia a scrivere "ABRACADABRA"

$$E(\tau) = 26^{11} + 26^4 + 26$$

(TEST)

■ DISUGUAGLIANZA MASSIMALE (DOOB, CASO DISCRETO)

X subмg non negativa

$\forall n \geq 1 \ \forall \lambda > 0$ $$\boxed{P\left(\max_{1 \leq k \leq n} X_k \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} E(X_n)}$$

Dim (1) è diretta e piuttosto semplice (2012, Caravenna, Williams) l'idea però non è chiara

Dim (2) chiarisce l'idea, ma si appoggia su un altro teorema: optional sampling theorem

Premessa: disug. massimale assomiglia a quella di Markov

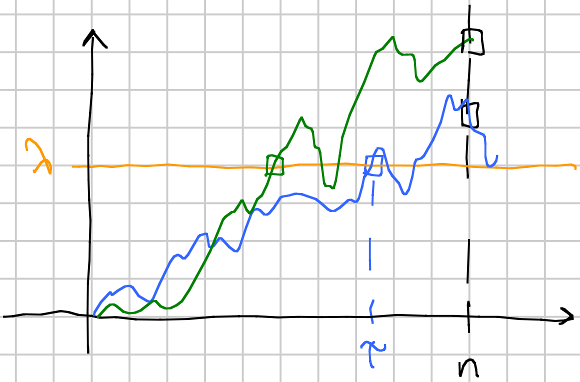
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Disug Markov} \\ X \geq 0 \text{ q.c. } X \in L^1 \\ \forall \lambda > 0 \quad P(X \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} E(X) \end{array}}$$

Dim

$$E(X) \geq E(X; X \geq \lambda) = E(X | X \geq \lambda) P(X \geq \lambda)$$
$$\geq \lambda P(X \geq \lambda)$$

$$E(X_n) \geq E(X_n; \underbrace{\max_{1 \leq k \leq n} X_k \geq \lambda}_{\tau \leq n}) = E(X_n | \tau \leq n) P(\tau \leq n) \underset{\text{o.sam.t.}}{\geq} E(\overset{\lambda}{\overset{\wedge\!\shortparallel}{X_\tau}}) P(\tau \leq n)$$

dove τ hitting time di $[\lambda, +\infty)$



$\tau \leq n \quad {}^{n}E(X_n) \geq \lambda^{n}$

OPTIONAL SAMPLING THEOREM (CASO DISCRETO)

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}, P) \qquad X = (X_n)_{n\geq 0}$ sup mg

τ_1, τ_2 t.d.a. : $\boxed{\tau_1 \leq \tau_2 \leq k \text{ q.c.}}$

Allora $\rightarrow X_{\tau_i} \in L^1 \qquad i = 1,2$

$\rightarrow \boxed{E(X_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}) \leq X_{\tau_1} \quad \text{q.c.}}$

☆ È la proprietà di supermartingala per tempi casuali <u>limitati</u>

<u>Dim</u> ① $X_{\tau_i} \in L^1$

$$E|X_{\tau_i}| = \sum_{n=1}^{k} E(|X_n|; \tau_i = n) \leq \sum_{1}^{k} E|X_n| < \infty$$

② $Y = E(X_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}) \qquad Y \overset{?}{\leq} X_{\tau_1}$ q.c.

basta $\quad E(Y; A) \leq E(X_{\tau_1}; A) \qquad \forall A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$

Sia $A \in \mathcal{F}_{\tau_1} \iff \forall n \geq 1 \quad A \cap \{\tau_1 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$

$\iff \forall n \geq 1 \quad A \cap \{\tau_1 = n\} \in \mathcal{F}_n$ (check)

$n \leq k \quad E(X_{\tau_1}; A \cap \{\tau_1 = n\}) = E(X_n; \underbrace{A \cap \{\tau_1 = n\}}_{\in \mathcal{F}_n})$

$\geq E(X_k; A \cap \{\tau_1 = n\})$

sommo per $n = 1, 2, \dots, k \qquad \{\tau_1 = n\}$ sono disgiunti e sono partizione

$E(X_{\tau_1}; A) \geq E(X_k; A) \qquad \forall A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$

X^{τ_2} è sup mg come X, quindi

$$E(X_{\tau_1}; A) \underset{\tau_1\wedge\tau_2=\tau_1}{=} E(X^{\tau_2}_{\tau_1}; A) \underset{\text{sopra}}{\geq} E(X^{\tau_2}_{k}; A) \underset{k\wedge\tau_2=\tau_2}{=} E(X_{\tau_2}; A) \underset{\text{def di } Y}{=} E(Y; A) \qquad \square$$

■ DISUG. MASSIMALE DISCRETA

X sub-mg. non negativa $\lambda > 0$ $n \geq 1$

$$\boxed{P\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} E(X_n)}$$

Dim $\tau := \inf\{k \geq 1 : X_k \geq \lambda\}$

$$E(X_n) \geq E(X_n ; \tau \leq n) = E(X_n | \tau \leq n) P(\tau \leq n)$$

evento $\tau_1 := \tau \wedge n$ t.d.a. limitato

(HW)

$$= E(E(X_n | \mathcal{F}_{\tau_1}) | \tau \leq n) P(\tau \leq n)$$

$$\geq E(X_{\tau_1} | \tau \leq n) P(\tau \leq n) = E(X_\tau | \tau \leq n) P(\tau \leq n) \geq \lambda P(\tau \leq n) \quad \square$$

HW: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ X v.a. $\mathcal{G}$ σ-alg $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ $X \in L^1$ $H \in \mathcal{G}$

$$E(E(X|\mathcal{G})|H) = E(X|H)$$

■ OPTIONAL SAMPLING THEOREM CONTINUO

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ $X = (X_t)_{t\geq 0}$ supermg continua

t.d.a. $\tau_1 \leq \tau_2 \leq k$ q.c., allora

i. $X_{\tau_i} \in L^1$ $i = 1, 2$

ii. $E(X_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}) \leq X_{\tau_1}$ q.c.

★ Analogo per le sub mg e mg

Dim $\boxed{\text{no}}$, ma quella del Baldi è bella e corta

ma usa la convergenza L^1 delle mg unif. integrabili

DISUG MASSIMALE CONTINUA

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ $\quad X = (X_t)_{t\geq 0}$ sub-mg non negativa
X a traiettorie continue, allora $\forall \lambda > 0 \ \forall t \geq 0$

$$\boxed{P\left(\max_{[0,t]} X_s \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} E(X_t)}$$

<u>Dim</u> : (1) $\tau := \inf\{t \geq 0 : X_t \in [\lambda, \infty)\}$ hitting time $\Rightarrow$ t.d.a.

traiettorie continue $\quad$ insieme chiuso

da qui, come prima usando <u>o. sam. t.</u>

(2) in alternativa vedi (2012, Caravenna e Baldi)

UNA MARTINGALA ARRESTATA È UNA MARTINGALA (TEMPI CONTINUI)

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ $\quad X = (X_t)_{t\geq 0}$ super-mg a traiettorie continue τ un t.d.a. Allora X^τ è una super-mg.

★ Analogamente se X è sub-mg o mg.

<u>Dim</u> $\quad X^\tau = (X_t^\tau)_{t\geq 0} \qquad X_t^\tau := X_{\tau\wedge t}$

devo verificare che :

i. $X_t^\tau \in L^1(\mathcal{F}_t) \quad \forall t \geq 0$

ii. $E(X_t^\tau | \mathcal{F}_s) \leq X_s^\tau$ q.c. $\forall\, 0 \leq s \leq t$

i. $X_t^\tau = X_{\tau\wedge t}$ è $\mathcal{F}_{\tau\wedge t}$-misurabile

siccome $\tau\wedge t \leq t$ q.c. $\quad \mathcal{F}_{\tau\wedge t} \subseteq \mathcal{F}_t$

quindi X_t^τ è $\mathcal{F}_t$-mis.

$\tau\wedge t$ è t.d.a. limitato $\Rightarrow X_{\tau\wedge t} \in L^1$ per <u>o. sam. t.</u> (i.)

ii. $E(X_t^\tau | \mathcal{F}_{\tau_1}) = E(X_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}) \overset{\text{o.sam.t}}{\leq} X_{\tau_1} = X_s^\tau$

$\tau \wedge t$ $\qquad$ $\tau \wedge s$ $\qquad$ $\tau_1 \leq \tau_2 \leq t$ q.c.

qui vorremo $\mathcal{F}_s$

siccome $\tau_1 = \tau \wedge s \leq s$ $\quad \mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_s$

$$E(X_t^\tau | \mathcal{F}_{\tau_1}, \mathcal{F}_s) = E(X_t^\tau | \mathcal{F}_{\tau_1})$$

fosse stato il contrario avrei finito

sia $Y = E(X_t^\tau | \mathcal{F}_s)$ $\quad$ sia $Z = E(X_t^\tau | \mathcal{F}_{\tau_1})$

$C \in \mathcal{F}_s$ $\quad A := C \cap \{\tau \leq s\}$ $\quad B := C \cap \{\tau > s\}$ $\quad C = A \cup B$

ho già dimostrato che $Z \leq X_{\tau_1}$ q.c.

Z e Y coincidono q.c. su B $\leftarrow$ HW : $B \in \mathcal{F}_{\tau_1}$

$$\Rightarrow E(X_{\tau_1}; B) \geq E(Z; B) = E(Y; B)$$

su A, $\tau \leq s \leq t$ quindi $\tau_1 = \tau_2$ q.c.

$$\Rightarrow E(X_{\tau_1}; A) = E(X_{\tau_2}; A) = E(Y; A)$$

$A, B, C \in \mathcal{F}_s$

sommando ho $E(X_{\tau_1}; C) \geq E(Y; C)$ $\quad \forall C \in \mathcal{F}_s$

X_{τ_1} e Y sono entrambi $\mathcal{F}_s$-misurabili quindi

$$X_{\tau_1} \geq Y = E(X_{\tau_2} | \mathcal{F}_s) \quad \text{q.c.}$$

□

III CONTINUITÀ DELL' INTEGRALE STOCASTICO

• Thm: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ $\quad B$ BM $\quad X \in M^2_{0,T}$ $\quad T>0$

$$I_t := I_{0,t}(X|_{[0,t]}) = \int_0^t X_s \, dB_s \qquad t \in [0,T]$$

Allora il processo stocastico $I = (I_t)_{t\geq 0}$ ammette una modificazione continua.

Dim $\quad I_t := L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} I_t^{(n)} \qquad \Delta_{0,T} \ni \delta^{(n)}$

dove $\quad I_t^{(n)} := \sum_{i=1}^{N} \underset{\uparrow}{c_{i-1}^{(n)}} \left(B_{\delta_i^{(n)}\wedge t} - B_{\delta_{i-1}^{(n)}\wedge t} \right) \qquad \forall t \in [0,T]$

dipendono da X

$\forall n \geq 1 \quad I^{(n)} = (I_t^{(n)})_{t\geq 0}$ è un processo a traiettorie continue

inoltre $\quad I_t^{(n)} = I_{0,t}\left(X^{(n)}|_{[0,t]} \right)$

dove $\quad X_u^{(n)} := \sum_{i=1}^{N} c_{i-1}^{(n)} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1}^{(n)}, \delta_i^{(n)})}(t)$

quindi $I^{(n)}$ è una mg L^2 (visto in precedenza)

$$P\left(\max_{[0,T]} |\underbrace{I_t^{(n)} - I_t^{(n-1)}}_{\text{mg}}| \geq a_n \right) = P\left(\max_{[0,T]} \underbrace{\left(I_t^{(n)} - I_t^{(n-1)} \right)^2}_{\substack{\text{sub-mg} \\ \text{non negativa} \\ \text{traiettorie continue}}} \geq a_n^2 \right)$$

$$\overset{\text{disug. max}}{\leq} a_n^{-2} E\left[\left(I_T^{(n)} - I_T^{(n-1)} \right)^2 \right] \overset{\text{linearità}}{=} a_n^{-2} \left\| I_{0,T}\left(X^{(n)} - X^{(n-1)} \right) \right\|^2_{L^2}$$

$$\overset{\text{isom di Itô}}{=} a_n^{-2} \left\| X^{(n)} - X^{(n-1)} \right\|^2_{M^2}$$

$\boxed{\text{Se}}$ ho che $\sum_{n\geq 1} a_n^{-2} \| X^{(n)} - X^{(n-1)} \|^2_{M^2} < \infty$, per Borel-Cantelli

con prob. 1 $\quad \max_{[0,T]} |I_t^{(n)} - I_t^{(n-1)}| < a_n$ definitivamente

$\boxed{\text{Se}}$ ho che $\sum_{n\geq 1} a_n < \infty$, oltre a quella prima

con prob. 1 $\quad \sum_{n\geq 1} \max_{[0,T]} \left| I_t^{(n)} - I_t^{(n-1)} \right| < \infty$

Deduco che $I^{(n)}$ è q.c. di Cauchy per la norma del sup:

q.o.-ω $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n(\omega) : m_1, m_2 \geq n \Rightarrow \sup_{[0,T]} \left| I_t^{(m_1)} - I_t^{(m_2)} \right| < \varepsilon$

infatti: $\quad \sup_{[0,T]} \left| I_t^{(m_1)} - I_t^{(m_2)} \right| \leq \sum_{m_1+1}^{m_2} \max_{[0,T]} \left| I_t^{(k)} - I_t^{(k-1)} \right|$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} \max_{[0,T]} \left| I_t^{(k)} - I_t^{(k-1)} \right| < \varepsilon$$

scelgo $n(\omega)$ in modo che sia vera

Allora q.o.-ω $\quad I_\cdot^{(n)}(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} I_\cdot^{(\infty)}(\omega)$ convergenza uniforme e limite continuo

$\Rightarrow \forall t \in [0,T] \quad I_t^{(n)} \xrightarrow{\text{q.c.}} I_t^{(\infty)}$

ma per definizione $I_t^{(n)} \xrightarrow{L^2} I_t$

q.c. e $L^2 \Rightarrow$ conv. in P
$\Rightarrow I_t = I_t^{(\infty)}$ q.c.

Questa è la def. di modificazione: $\forall t \quad I_t = I_t^{(\infty)}$ q.c.

★ Restano da chiudere i due $\boxed{\text{se}}$: scelgo $(a_n)_{n\geq 1}$ sommabile qualsiasi e poi $\delta^{(n)}$ in modo che la convergenza di $X^{(n)} \xrightarrow{M^2} X$ sia abbastanza veloce che $a_n^{-2} \| X^{(n)} - X^{(n-1)} \|_{M^2}^2$ sia sommabile. $\square$

★ Da adesso si supporrà di fissare $\int_0^t X_s \, dB_s$ con traiettorie continue.

VARIAZIONE QUADRATICA (RELOADED)

(per mg continue L^2)

- **Thm** $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ $\quad X$ mg L^2 a traiettorie continue

  $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtrazione completa : $\forall A \subseteq \Omega : \exists H \in \mathcal{F}$ $A \subseteq H$
  $P(H)=0 \Rightarrow A \in \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_t$

  Allora $\exists!$ un processo $A = (A_t)_{t\geq 0}$ continuo, adattato, nullo in zero, crescente tale che:

$$X_t^2 - A_t \text{ sia una mg.}$$

(vedi ora 13)

Inoltre $A = \langle X \rangle$ $\qquad \langle X \rangle_t := P\text{-}\lim_{\substack{|\delta| \to 0 \\ \delta \in \Delta_{0,t}}} \sum_{i=1}^{N^\delta} (X_{\delta_i} - X_{\delta_{i-1}})^2$

Dimostriamo solo l'unicità perché le altre cose non ci servono

★ Nell'ora 28 : $\left(\int_0^t X_s dB_s\right)^2 - \int_0^t X_s^2 ds$ è una martingala

$$\boxed{\left\langle \int_0^t X_s dB_s \right\rangle = \int_0^t X_s^2 ds}$$

variazione quadratica dell'integrale stocastico.

ANALISI STOCASTICA ora 35

- Unicità del processo caratterizzato nel thm precedente

<u>Dim</u> RPA $A^{(1)}$ e $A^{(2)}$ due processi che soddisfano tutte le proprietà

$$M_t := A_t^{(1)} - A_t^{(2)} = \overbrace{X_t^2 - A_t^{(2)}}^{mg} - \overbrace{\left(X_t^2 - A_t^{(1)}\right)}^{mg} \qquad \text{martingala}$$

M_t mg continua, nulla in zero, a variazione totale limitata su ogni intervallo $[0,t]$ $\quad$ ($=$ <u>BV</u>)

Mostriamo che $M_t \equiv 0$:

$\forall t>0$, sia V_t la variazione totale su $[0,t]$ $\qquad V_t := \sup\limits_{\delta \in \Delta_{0,t}} \sum\limits_i |M_{\delta_i} - M_{\delta_{i-1}}|$

a) Fisso $t>0$: $V_t \leq K$ q.c.

$$E(M_t^2) \underset{\uparrow}{=} E\left[\sum_{i=1}^N \left(M_{\delta_i}^2 - M_{\delta_{i-1}}^2\right)\right] = \sum_{i=1}^N E\left[E\left(M_{\delta_i}^2 - M_{\delta_{i-1}}^2 \middle| \mathcal{F}_{\delta_{i-1}}\right)\right]$$

$\delta \in \Delta_{0,t}$

$$= \sum_{i=1}^N E\left[E\left(M_{\delta_i}^2 + M_{\delta_{i-1}}^2 \middle| \mathcal{F}_{\delta_{i-1}}\right) - 2 M_{\delta_{i-1}}^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^N \left(M_{\delta_i} - M_{\delta_{i-1}}\right)^2\right]$$

$M_{\delta_{i-1}} E(M_{\delta_i} | \mathcal{F}_{\delta_{i-1}})$

$$\leq E\left[\sup_i |M_{\delta_i} - M_{\delta_{i-1}}| \underbrace{\sum_{j=1}^N |M_{\delta_j} - M_{\delta_{j-1}}|}_{\leq V_t}\right] \leq K\, E\left[\underbrace{\sup_i |M_{\delta_i} - M_{\delta_{i-1}}|}_{\text{tende a zero per } |\delta|\to 0 \text{ perché } M_\cdot(\omega) \text{ è unif. cont.}}\right]$$

$\sup\limits_i |M_{\delta_i} - M_{\delta_{i-1}}| \xrightarrow[|\delta|\to 0]{q.c.} 0$ $\quad$ ma è banalmente $\leq V_t \leq K$

quindi per (DOM)

$$E(M_t^2) = 0$$

NB: I passaggi vanno fatti al contrario perché non si sa se $M_t \in L^2$.

b) Uso la localizzazione

$\tau_n := \inf\{t \geq 0 : V_t \geq n\}$ V continua $\longrightarrow$ τ t.d.a.

$\{V_t \leq n\} = \{\tau_n \geq t\} \underset{n\to\infty}{\nearrow}$ evento di prob. 1

$\tau_n \nearrow \infty$ q.c. perché altrimenti

$\exists t \geq 0 : V_t = \infty$ con prob positiva

M^{τ_n} mg arrestata : continua, nulla in zero con variaz. totale $\leq n$ q.c. $\Rightarrow$ applico a)

$$E\left[(M_t^{\tau_n})^2\right] = 0 \qquad \forall t \geq 0 \ \forall n \geq 1$$

$$E(M_t^2) \underset{(\text{MON})}{=} \lim_{n\to\infty} E\left[M_t^2 ; \tau_n \geq t\right] = \lim_{n\to\infty} E\left[(M_t^{\tau_n})^2 ; \tau_n \geq t\right] = 0$$

$\square$

☆ $I_t = \int_0^t X_s \, dB_s \qquad \langle I \rangle_t = \int_0^t X_s^2 \, ds$

■ TEOREMA DI LOCALIZZAZIONE (per int. stoc. di processi M^2)

Thm : $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$, B BM, $A \in \mathcal{F}$, $t > 0$, $X, Y \in M^2_{0,t}$

hp : $\forall \omega \in A$ Leb q.o. $-s \in [0,t]$, $X_s(\omega) = Y_s(\omega)$

ts : q.o. $-\omega \in A$ $I_\cdot(X) = I_\cdot(Y)$ su $[0,t]$

Dim Per linearità suppongo wlog $Y = 0$

hp : $\forall \omega \in A$ Leb q.o. $-s \in [0,t]$, $X_s(\omega) = 0$.

$$I_s^{(n)} := \sum_{i=1}^{N} c_{i-1}^{(n)} \left(B_{\delta_i^{(n)} \wedge s} - B_{\delta_{i-1}^{(n)} \wedge s}\right) \qquad \delta^{(n)} \in \Delta_{0,t} \qquad s \in [0,t]$$

a patto di scegliere $I_\cdot$ a traiettorie continue e $\delta^{(n)}$ abbastanza veloce, sappiamo $I^{(n)} \xrightarrow{q.c.} I_\cdot$ nella top. uniforme

$$C_i^{(n)} = \frac{1}{\delta_i^{(n)} - \delta_{i-1}^{(n)}} \int_{\delta_{i-1}^{(n)}}^{\delta_i^{(n)}} X_s \, ds = 0 \quad \forall \omega \in A$$

$$I_\cdot^{(n)} = 0 \quad \forall \omega \in A \quad \Rightarrow \quad \text{q.o.-}\omega \in A \quad I_\cdot = 0 \qquad \square$$

ora 36

Gli spazi $\mathcal{M}^2$ e $\mathcal{M}^2_{loc}$

$$\mathcal{M}^2 := \left\{ X = (X_t)_{t \geq 0} : X \in M^2_{0,t} \quad \forall t \geq 0 \right\} \leftarrow E\int_0^t X_s^2 ds < \infty \quad \forall t$$

$$\mathcal{M}^2_{loc} := \left\{ X = (X_t)_{t \geq 0} : X \text{ progr. mis. } \int_0^t X_s^2 ds < \infty \text{ q.c. } \quad \forall t \geq 0 \right\}$$

$$\mathcal{M}^2 \subseteq \mathcal{M}^2_{loc} \leftarrow \text{lo generalizziamo}$$

↑ abbiamo l'integrale stocastico

INTEGRALE STOCASTICO PER PROCESSI $\mathcal{M}^2_{loc}$

<u>Thm</u>: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$, B BM, $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$,

$$\tau_n := \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t X_s^2 ds \geq n \right\} \qquad \text{t.d.a.}$$

1) $X \mathbb{1}_{[0,\tau_n)} \in \mathcal{M}^2 \qquad \forall n \geq 1$

2) $\displaystyle\int_0^t X_s \mathbb{1}_{[0,\tau_n)}(s) \, dB_s$ converge q.c. per $n \to \infty$

Sia $\displaystyle I_t := \lim_{n \to \infty} \int_0^t X_s \mathbb{1}_{[0,\tau_n)}(s) \, dB_s$

3) I_t ha traiettorie continue

4) Se $X \in \mathcal{M}^2$, allora $\displaystyle I_t = \int_0^t X_s \, dB_s$

- <u>Def</u> Se $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$, $\displaystyle\int_0^t X_s \, dB_s$ è definito come I_t qua sopra.

<u>Dim</u> $\int_0^{\cdot} X_s^2 ds$ è continua, quindi

$$\left\{ \int_0^t X_s^2 ds \leq n \right\} = \{\tau_n \geq t\} \nearrow \text{evento di prob. } 1$$

altrimenti $\exists t > 0 : P\left(\int_0^t X_s^2 ds = \infty \right) > 0 \Rightarrow X \notin M^2_{loc}$

$\int_0^{\tau_n} X_s^2 ds$ definita semplicemente per ogni ω

$$\int_0^{\tau_n} X_s^2 ds \leq n \quad q.c. \quad (= n \text{ se } \tau_n < \infty \quad \leq n \text{ se } \tau_n = \infty)$$

$Y^{(n)} := X \mathbb{1}_{[0,\tau_n)}$

1) $$E \int_0^{\infty} (Y_s^{(n)})^2 ds = E \int_0^{\infty} X_s^2 \mathbb{1}_{[0,\tau_n)}(s) ds = E \int_0^{\tau_n} X_s^2 ds \leq n$$

inoltre $Y^{(n)}$ è progr. misurabile perché X lo è

e $\mathbb{1}_{[0,\tau_n)}$ è adattata e cont. a dx

2) $I^{(n)}$ l'integrale stocastico di $Y^{(n)}$ mg L^2 continua

su $\{\tau_1 \geq t\}$ $\quad X_t = Y_t^{(1)} = Y_t^{(2)} = \dots$

su $\{\tau_2 \geq t\}$ $\quad Y_t^{(1)}$ può essere 0 ma $X_t = Y_t^{(2)} = Y_t^{(3)} = \dots$

in generale $\quad Y_t^{(m)} = X_t \quad \forall m \geq n \quad$ su $\{\tau_n \geq t\}$

$$Y_t^{(m)} \xrightarrow[m \to \infty]{q.c.} X_t$$

Voglio usare il <u>thm di localizzazione</u>:

fissato $n \geq 1$, per ogni $m_1, m_2 \geq n$ si ha che:

$$Y_s^{(m_1)}(\omega) = Y_s^{(m_2)}(\omega) \quad \forall \omega \in \{\tau_n \geq t\} \quad \forall s \in [0,t]$$

$$\Rightarrow I_t^{(m_1)} = I_t^{(m_2)} \quad q.o. - \omega \in \{\tau_n \geq t\}$$

$I_t^{(m)}$ converge q.c. per $m \to \infty$

3) Sempre per thm di localizzazione

Fissato $t>0$ e $n \geq 1$ per ogni $m_1, m_2 \geq n$

$$I_\cdot^{(m_1)} = I_\cdot^{(m_2)} \quad q.o.-\omega \in \{\tau_n \geq t\} \quad \text{su } [0,t]$$

inoltre sono continui $\Rightarrow I_\cdot$ continuo su $[0,t]$

4) Se $X \in \mathcal{M}^2$ da $Y_t^{(m)} = X_t$ deduco

$$I_t^{(m)} = \int_0^t X_s \, dB_s \quad \text{e quindi la tesi} \qquad \square$$

★ Ogni processo adattato e a traiettorie continue è $\mathcal{M}^2_{loc}$

★ Linearità e decomposizione $\int_a^c \dots = \int_a^b \dots + \int_b^c \dots$ valgono ancora

★ L'integrale stocastico di $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$ non è:

- una mg
- un processo L^2 né L^1

non vale l'isometria di Itō

● L'integrale stocastico per processi $\mathcal{M}^2_{loc}$ è un operatore continuo nelle topologie giuste

Thm: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$, $(X^{(n)})_{n\geq 1}$, $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$, $t>0$

hp: $X^{(n)} \to X$ in probabilità nella norma $L^2(0,t)$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\|X^{(n)} - X\|_{L^2(0,t)} > \varepsilon \right) = 0$$

ts: $I_\cdot(X^{(n)}) \to I_\cdot(X)$ in prob. nella norma $L^\infty(0,t)$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{[0,t]} |I_s(X^{(n)}) - I_s(X)| > \varepsilon \right) = 0$$

ANALISI STOCASTICA

ora 37

Note Title 16/01/2014

■ CONTINUITÀ I per processi $\mathcal{M}^2_{loc}$

<u>Thm</u>: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$, $(X^{(n)})_{n\geq 1}$, $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$, $t>0$

hp: $X^{(n)} \to X$ in probabilità nella norma $L^2(0,t)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\|X^{(n)} - X\|_{L^2(0,t)} > \varepsilon \right) = 0$$

ts: $I_\cdot(X^{(n)}) \longrightarrow I_\cdot(X)$ in prob. nella norma $L^\infty(0,t)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{[0,t]} |I_s(X^{(n)}) - I_s(X)| > \varepsilon \right) = 0$$

<u>Dim</u>: $P\left(\sup_{[0,t]} |I_s(X^{(n)}) - I_s(X)| > \varepsilon \right)$

$$= P\left(\sup_{[0,t]} |I_s(X^{(n)} - X)| > \varepsilon \,,\, \overbrace{\int_0^t (X_s^{(n)} - X_s)^2 ds \leq \delta}^{=: H \in \mathcal{F}} \right)$$

$$+ P\left(\dots \,,\, \int_0^t (X_s^{(n)} - X_s)^2 ds > \delta \right)$$

(check)

$$= P\left(\sup_{[0,t]} |I_s(\underbrace{(X^{(n)} - X) \mathbb{1}_H}_{\in \mathcal{M}^2 \text{ perché ha } \|\cdot\|^2_{\mathcal{M}^2} \leq \delta})| > \varepsilon \,,\, H \right) + P\left(\dots \,,\, H^c \right)$$

$$\leq P\left(\sup_{[0,t]} I_s\left((X^{(n)} - X) \mathbb{1}_H \right)^2 > \varepsilon^2 \right) + P(H^c)$$

disug. max

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \underbrace{E\left[I_t\left((X^{(n)} - X) \mathbb{1}_H \right)^2 \right]}_{= \|I_t(\dots)\|^2_{L^2} = \|\dots\|^2_{\mathcal{M}^2} \leq \delta} + P(H^c) \leq \frac{\delta}{\varepsilon^2} + \underbrace{P\left(\int_0^t (X_s^{(n)} - X_s)^2 ds > \delta \right)}_{\text{piccolo a piacere}}$$

mando $n \to \infty$

$$\limsup_n P\left(\sup_{[0,t]} |I_s(X^{(n)}) - I_s(X)| > \varepsilon \right) \leq \frac{\delta}{\varepsilon^2} \qquad \forall \delta > 0$$

Per l'arbitrarietà di δ, $P\left(\|I_\cdot(X^{(n)}) - I_\cdot(X)\|_{sup} > \varepsilon \right) = 0$

$\square$

INTEGRARE FINO AD UN TEMPO D'ARRESTO

$$\int_0^\tau X_s\,dB_s \overset{?}{=} \begin{cases} I_\tau & \text{dove ho definito } I_t := \int_0^t X_s\,dB_s \\ \int_0^\infty X_s \mathbb{1}_{[0,\tau]}(s)\,dB_s \end{cases}$$

Sono definizioni diverse che però coincidono se τ è limitato.

- **Thm**: $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$ $\tau \leq T$ q.c., sia $I_t := \int_0^t X_s\,dB_s$. Allora

$$I_\tau = \int_0^T X_s \mathbb{1}_{[0,\tau]}\,dB_s$$

Dim: (TEST)

INTEGRALE STOCASTICO DI PROCESSI $\mathcal{M}^2_{loc}$ È UNA MG LOCALE

- **Def** $X = (X_t)_{t\geq 0}$ è una martingala locale se esiste $(\tau_n)_{n\geq 1}$ t.d.a., t.c. $\tau_n \nearrow \infty$ q.c. per cui $\forall n \geq 1$, X^{τ_n} è una martingala

  ★ mg $\Rightarrow$ mg locale (check)

  ★ X mg locale $|X_t| \leq Y \in L^1$ $\forall t \geq 0$ $\Rightarrow$ X mg (HW)

  ★ X mg locale $X \geq 0$ $\Rightarrow$ X super-mg (HW)

- **Thm**: $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$ $I = (I_t)_{t\geq 0}$ $I_t := \int_0^t X_s\,dB_s$

  Allora I è mg locale

Dim $I_t :=$ q.c.$-\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^t X_s \mathbb{1}_{[0,\tau_n)}(s)\,dB_s$

dove $\tau_n := \inf\left\{ s \geq 0 : \int_0^s X_u^2\,du \geq n \right\}$

Scelgo questi τ_n $X \in \mathcal{M}^2_{loc} \Rightarrow \int_0^s X_u^2\,du < \infty$ q.c. $\Rightarrow \tau_n \nearrow \infty$ q.c.

I^{τ_n} devo mostrare che è una martingala

$$\forall\, t \geq 0,\quad I_t^{\tau_n} = I_{\underbrace{t\wedge\tau_n}} = I_\tau = \int_0^t X_s \mathbb{1}_{[0,\tau]}(s)\, dB_s = \int_0^t \overbrace{X_s \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(s)}^{\tilde{X}_s}\, dB_s$$

$=: \tau$ tda $\leq t$ q.c.

$I^{\tau_n} = I(\tilde{X})$ siccome $\tilde{X} \in \mathcal{M}^2$ $\quad I^{\tau_n}$ è mg.

---

ora 38

PROCESSI DI ITŌ, FORMULA DI ITŌ

$$Y_t - Y_0 = \int_0^t X_s\, dB_s + \int_0^t Z_s\, ds$$

$\leftarrow$ processi di Itō hanno questa forma

$X \in \mathcal{M}^2_{loc}$ $\quad Z \in \mathcal{M}^1_{loc}$ $\quad \int_0^t |Z_s|\, ds < \infty$ q.c. $\forall t \geq 0$

Si potrà definire $\int_0^t U_s\, dY_s$ per $U \in \mathcal{M}^2_{loc}$

- Differenziale stocastico

Notazione: se si scrive $\boxed{dX_t = A_t\, dB_t + C_t\, dt}$

ciò significa esattamente che $\forall t$ per cui ha senso

$$\boxed{X_t - X_0 = \int_0^t A_s\, dB_s + \int_0^t C_s\, ds}$$

FORMULA DI ITŌ (partiamo da quella più semplice)

- Thm: $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2 $\quad (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$, B BM

$X = (X_t)_{t\geq 0}$ $\quad X_t := \varphi(B_t)$ $\quad$ Allora

$$\boxed{dX_t = \varphi'(B_t)\, dB_t + \frac{1}{2}\varphi''(B_t)\, dt}$$

$$\star \quad X_t = X_0 + \int_0^t \underbrace{\varphi'(B_s)}_{\varphi' \text{ continua}} dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \underbrace{\varphi''(B_s)}_{\varphi'' \text{ continua}} ds \qquad \text{forma esplicita}$$

$\varphi' \circ B_s$ e $\varphi'' \circ B_s$ continui, adattati $\in \mathcal{M}^2_{loc} \subseteq \mathcal{M}^1_{loc}$

quindi ha sempre senso

$\star$ Esempi : $\quad X_t = B_t^2 \qquad \varphi(x) = x^2 \qquad \varphi \in \mathcal{C}^2$

$$B_t^2 = X_t = 0 + \int_0^t 2B_s\, dB_s + t$$

$$\int_0^t B_s\, dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$$

$$X_t = e^{\lambda B_t} \qquad \varphi(x) = e^{\lambda x} \in \mathcal{C}^2 \qquad \lambda \neq 0$$

$$e^{\lambda B_t} = X_t = 1 + \int_0^t \lambda e^{\lambda B_s} dB_s + \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t e^{\lambda B_s} ds$$

$\star$ Scritto : $\displaystyle\int_0^t \varphi'(B_s)\, dB_s = \varphi(B_t) - \varphi(B_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi''(B_s)\, ds$

dà una definizione ω per ω (pathwise) di $\displaystyle\int_0^t \varphi'(B_s)\, dB_s$

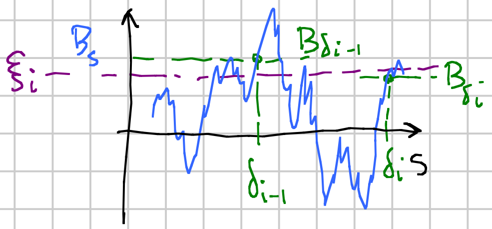
DIMOSTRAZIONE FORMULA DI ITÔ SEMPLICE

$t \geq 0$ fissato $\qquad \delta, \delta^{(n)} \in \Delta_{[0,t]} \qquad n \geq 1$

$\forall \delta \in \Delta_{[0,t]}$

$$\varphi(B_t) - \varphi(B_0) = \sum_{i=1}^{N}\left[\varphi(B_{\delta_i}) - \varphi(B_{\delta_{i-1}})\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left[\varphi'(B_{\delta_{i-1}})(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) + \frac{1}{2}\varphi''(\underbrace{\xi_i}_{B_{\eta_i}})(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2\right]$$



$\exists\, \xi_i \in [B_{\delta_{i-1}}, B_{\delta_i}]$: è vero

$\exists\, \eta_i \in [\delta_{i-1}, \delta_i] : B_{\eta_i} = \xi_i$

Preso $\delta = \delta^{(n)}$ con $\delta^{(n)}$ che si raffina devo dimostrare che

$$\text{I} \qquad \sum_{i=1}^{N} \varphi'(B_{\delta_{i-1}})(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \int_0^t \varphi'(B_s)\, dB_s$$

non scrivo esplicitamente la dipendenza da n

$$\text{II} \qquad \sum_{i=1}^{N} \left(\varphi''(B_{\eta_i}) - \varphi''(B_{\delta_{i-1}})\right)(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

$$\text{III} \qquad \sum_{i=1}^{N} \varphi''(B_{\delta_{i-1}})(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} \int_0^t \varphi''(B_s)\, ds$$

dim I Voglio usare la continuità di I

$$I_t^{(n)} = \int_0^t \sum_{i=1}^{N} \varphi'(B_{\delta_{i-1}}) \mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)}(s)\, dB_s = \sum_{i=1}^{N} \varphi'(B_{\delta_{i-1}})(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})$$

se verifico l'ipotesi di quel lemma ho che

$$I_\cdot^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{P,\ \sup} I_\cdot \qquad I_t = \int_0^t \varphi'(B_s)\, dB_s$$

converg. unif $\Rightarrow$ converg. puntuale : $I_t^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{P} I_t$

Devo però verificare che $X^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{P,\ L^2} X$

$$X^{(n)} = \sum_{i=1}^{N} \varphi'(B_{\delta_{i-1}}) \mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)} \qquad X = \varphi'(B_\cdot)$$

$$\|X^{(n)} - X\|^2_{L^2(0,t)} := \int_0^t (X_s^{(n)} - X_s)^2\, ds = \int_0^t \Big[\sum_i \varphi'(B_{\delta_{i-1}}) \mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)}(s) - \varphi'(B_s)\Big]^2 ds$$

$\sum_i \varphi'(B_s) \mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)}(s)$

$$= \int_0^t \sum_{i=1}^{N} \left(\varphi'(B_{\delta_{i-1}}) - \varphi'(B_s)\right)^2 \mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)}(s)\, ds$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \left(\varphi'(B_{\delta_{i-1}}) - \varphi'(B_s)\right)^2 ds$$

$\varphi' \circ B$ ha traiettorie continue, quindi unif continue

su $[0,t]$: $\forall \varepsilon>0 \ \exists \eta(\omega)>0$: $|s-u|<\eta \Rightarrow |\varphi'(B_s)-\varphi'(B_u)|<\varepsilon$

$\exists n_0(\omega)$: $n \geq n_0$ $|\delta^{(n)}| < \eta(\omega) \Rightarrow$

$$\| X^{(n)} - X \|^2_{L^2(0,t)} \leq \sum_{i=1}^{N} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \varepsilon^2 ds = t\varepsilon^2$$

ho dimostrato che $\quad \|X^{(n)}-X\|_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} 0 \Rightarrow$ converge in P

$\boxed{\text{ora } 39}$

dim (II) $\quad \varphi'' \circ B$ unif. cont. su $[0,t]$

q.o. $-\omega$ $\quad \forall \varepsilon>0 \ \exists \theta(\omega)$: $|u-s|<\theta \Rightarrow |\varphi''(B_u)-\varphi''(B_s)|<\varepsilon$

$|\eta_i - \delta_{i-1}| \leq |\delta_i - \delta_{i-1}| \leq |\delta|$

q.o. $-\omega$ $\quad \forall \varepsilon>0$: $\exists n_0(\omega)$: $n \geq n_0 \Rightarrow |\varphi''(B_{\eta_i}) - \varphi''(B_{\delta_{i-1}})| < \varepsilon \ \forall i$

$$\Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{N} \left(\varphi''(B_{\eta_i}) - \varphi''(B_{\delta_{i-1}})\right)(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2 \right| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{N} (B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2$$

io so che $\displaystyle \sum_{i=1}^{N} (B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2 \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} \langle B \rangle_t = t$

sarebbe un limite in probabilità ma vale q.c.
se $\delta^{(n)}$ è scelta bene. Ad esempio se $\sum_{n\geq 1} |\delta^{(n)}| < \infty$

q.o.$-\omega$ $\quad \forall \varepsilon>0$ $\quad \limsup_n$ LHS $\leq \varepsilon t$

$\Rightarrow$ q.o.$-\omega$ $\quad \lim_n$ LHS $=0 \Rightarrow$ LHS $\to 0$ q.c. e quindi in P

dim (III) caso a) : $|\varphi''| \leq C$

$$E\left\{ \left[\sum_{i=1}^{N} \varphi''(B_{\delta_{i-1}})(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2 - \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \varphi''(B_{\delta_{i-1}})(\delta_i - \delta_{i-1})}_{\text{q.c. converge a } \int_0^t \varphi''(B_s)ds} \right]^2 \right\}$$

$$= E\left\{ \left[\sum_{i=1}^{N} \varphi''(B_{\delta_{i-1}}) \left[(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2 - (\delta_i - \delta_{i-1}) \right] \right]^2 \right\}$$

$$= E\left\{\sum_{i,j}^{N} \varphi''(B_{\delta_{i-1}})\varphi''(B_{\delta_{j-1}})\left[(B_{\delta_i}-B_{\delta_{i-1}})^2-(\delta_i-\delta_{i-1})\right]\left[(B_{\delta_j}-B_{\delta_{j-1}})^2-(\delta_j-\delta_{j-1})\right]\right\}$$

si inserisce $E\left[\dots \mid \mathcal{F}_{\delta_{i\vee j-1}}\right]$

in questo modo restano solo i termini diagonali perché se $j<i$

$(B_{\delta_i}-B_{\delta_{i-1}})^2-(\delta_i-\delta_{i-1})$ è indip da $\mathcal{F}_{\delta_{i-1}}$ e il suo valore atteso è 0

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[\varphi''(B_{\delta_{i-1}})\right]^2 \underbrace{E\left\{\left[(B_{\delta_i}-B_{\delta_{i-1}})^2-(\delta_i-\delta_{i-1})\right]^2\right\}}\right\}$$

$Z := B_{\delta_i}-B_{\delta_{i-1}} \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2) \qquad \sigma^2=\delta_i-\delta_{i-1}$

$E\left\{\left[Z^2-\sigma^2\right]^2\right\} = E\left(Z^4-2\sigma^2Z^2+\sigma^4\right) = 3\sigma^4-2\sigma^4+\sigma^4$

$$\leq C^2\sum_{i=1}^{N} 2(\delta_i-\delta_{i-1})^2 \quad \leq 2C^2 t\,|\delta|$$

Ho dimostrato che

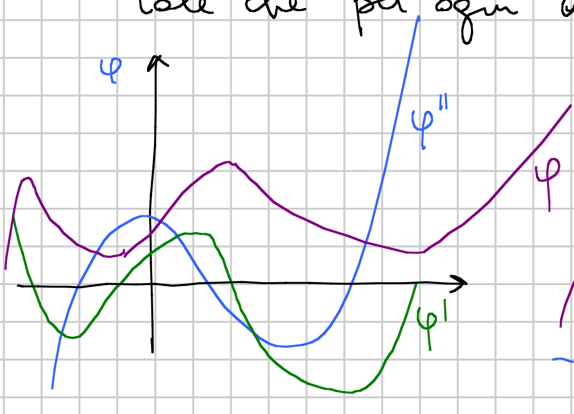
$$\sum_{i=1}^{N}\varphi''(B_{\delta_{i-1}})(B_{\delta_i}-B_{\delta_{i-1}})^2-\sum_{i=1}^{N}\varphi''(B_{\delta_{i-1}})(\delta_i-\delta_{i-1}) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\Omega)} 0 \quad \text{quindi in } P.$$

☆ Ho dimostrato il teorema $\forall \varphi\in\mathcal{C}^2 : \sup_x |\varphi''(x)|<\infty$

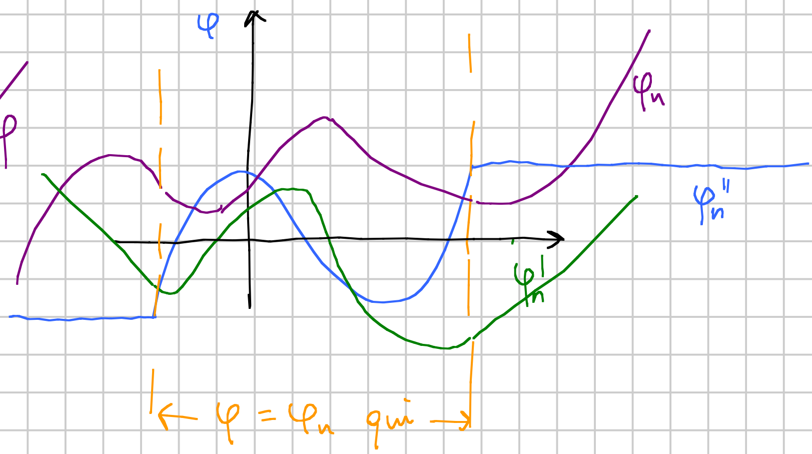
Caso b) $\varphi\in\mathcal{C}^2$ qualsiasi.

Trovo $(\varphi_n)_{n\geq1}$: $\varphi_n\in\mathcal{C}^2$, $|\varphi_n''|\leq n$ e

tale che per ogni $a<0<b$ $\quad \varphi_n\equiv\varphi$ definitivamente su $[a,b]$



$\varphi_n'' = -n \vee \varphi'' \wedge n$



$$\varphi_n'(x) = \varphi'(0) + \int_0^x \varphi_n''(s)\,ds \qquad \varphi_n(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi_n'(s)\,ds$$

Con questa costruzione, dato $a < 0 < b$, sia $m = \max_{[a,b]} |\varphi''|$

Allora $\forall n \geq m$ $\varphi_n \equiv \varphi$ su $[a,b]$

$\forall n \geq 1$ $\varphi_n \in C^2$ e $|\varphi_n''| <$ costante $\Rightarrow$ caso a)

$$\varphi_n(B_t) - \varphi_n(B_0) = \int_0^t \varphi_n'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_n''(B_s)\,ds \qquad \text{vale}$$

fissato t per q.o. ω $B_\cdot(\omega)$ manda $[0,t]$ in $[a,b]$
dove $a(\omega) = \min_{[0,t]} B_\cdot(\omega)$ $\quad b(\omega) = \max_{[0,t]} B_\cdot(\omega)$

quindi $\exists\, n_0(\omega) : n \geq n_0 \Rightarrow$

$$\varphi_n(B_s) = \varphi(B_s) \qquad \forall s \in [0,t]$$
$$\varphi_n'(B_s) = \varphi'(B_s)$$
$$\varphi_n''(B_s) = \varphi''(B_s)$$

- DIM FORMULA DI ITÔ (continua)

ora 39

$\forall n \geq 1 \quad \varphi_n \in C^2$ e $|\varphi_n''| <$ costante $\Rightarrow$ caso a)

$$\boxed{\varphi_n(B_t) - \varphi_n(B_0) = \int_0^t \varphi_n'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_n''(B_s)\,ds}$$ vale

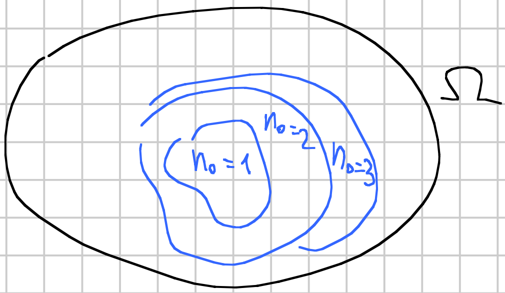
fissato t per q.o. ω $B_\cdot(\omega)$ manda $[0,t]$ in $[a,b]$

dove $a(\omega) = \min_{[0,t]} B_\cdot(\omega)$ $\quad b(\omega) = \max_{[0,t]} B_\cdot(\omega)$

quindi $\exists\, n_0(\omega) : n \geq n_0 \Rightarrow$
$$\varphi_n(B_s) = \varphi(B_s) \qquad \forall s \in [0,t]$$
$$\varphi_n'(B_s) = \varphi'(B_s)$$
$$\varphi_n''(B_s) = \varphi''(B_s)$$

$$\varphi_n(B_t) \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} \varphi(B_t)$$
$$\varphi_n(B_0) \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} \varphi(B_0)$$
$$\int_0^t \varphi_n''(B_s)\,ds \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} \int_0^t \varphi''(B_s)\,ds$$

banalmente, perché sono oggetti ben definiti per q.o. ω



$\{n_0 \leq k\} \nearrow$ evento di prob 1

su $\{n_0 \leq k\}$ $\quad \varphi_n \circ B \equiv \varphi \circ B \quad n \geq k$

thm di localizzazione $\quad A \in \mathcal{F} \quad \varphi_n'(B_\cdot) = \varphi'(B_\cdot)$ su $A \times [0,t]$

allora $\displaystyle\int_0^t \varphi_n'(B_s)\,dB_s = \int_0^t \varphi'(B_s)\,dB_s$

$n \geq k \geq 1$ $\quad$ su $A = \{n_0 \leq k\}$ $\quad \varphi_n' \circ B \equiv \varphi' \circ B \Rightarrow$ coincidono gli integrali quindi $\displaystyle\int_0^t \varphi_n'(B_s)\,dB_s \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} \int_0^t \varphi'(B_s)\,dB_s$ $\square$

HW: Verificare che il thm di localizzazione vale anche su $\mathcal{M}^2_{loc}$

PROCESSI DI ITÔ

- **Def** Un processo stocastico X continuo e adattato è un processo di Itô se esistono $U \in \mathcal{M}^1_{loc}$ e $V \in \mathcal{M}^2_{loc}$ t.c.

$$dX_t = U_t\,dt + V_t\,dB_t$$

ovvero:

$$X_t = X_0 + \int_0^t U_s\,ds + \int_0^t V_s\,dB_s$$

$U \in \mathcal{M}^1_{loc}$ $\quad$ $V \in \mathcal{M}^2_{loc} \Rightarrow \int_0^t V_s\,dB_s$ ben definito

$\int_0^t U_s\,ds$ ben definito è BV $\qquad$ non è BV, è mg locale cont.

★ La decomposizione è unica: (sketch)

RPA $\quad dX_t = U_t'\,dt + V_t'\,dB_t \quad$ allora

$$\underbrace{\int_0^t (U_s - U_s')\,ds}_{BV} = \underbrace{\int_0^t (V_s' - V_s)\,dB_s}_{\text{mg locale continua}}$$

Si può dimostrare che l'unica mg locale continua è il processo nullo.

★ Se $\varphi \in C^2$, allora per la formula di Itô, $\varphi \circ B$ è un processo di Itô

$$\boxed{d\varphi(B_t) = \varphi'(B_t)\,dt + \frac{1}{2}\varphi''(B_t)\,dB_t}$$

- Integrare rispetto ad un processo di Itô

Def Se X è un processo di Itô $\quad dX_t = U_t\,dt + V_t\,dB_t$
e Y è un processo t.c. $YU \in \mathcal{M}^1_{loc}$ e $YV \in \mathcal{M}^2_{loc}$
allora definiamo:

$$\boxed{\int_0^t Y_s\,dX_s := \int_0^t Y_s U_s\,ds + \int_0^t Y_s V_s\,dB_s}$$

È una definizione sensata. Si può dimostrare che

$$\int_0^t Y_s\,dX_s = P\text{-}\lim_{|\delta|\to 0} \sum_{i=1}^{N} Y_{\delta_{i-1}}\left(X_{\delta_i} - X_{\delta_{i-1}}\right)$$

$$\sum_i \left(X_{\delta_i} - X_{\delta_{i-1}}\right) = X_t - X_0 \approx \sum_i U_{\delta_{i-1}}\left(\delta_i - \delta_{i-1}\right) + \sum_i V_{\delta_{i-1}}\left(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}\right)$$

$$X_{\delta_i} - X_{\delta_{i-1}} \approx U_{\delta_{i-1}}(\delta_i - \delta_{i-1}) + V_{\delta_{i-1}}\left(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}\right)$$

$$\sum_i Y_{\delta_{i-1}}\left(X_{\delta_i} - X_{\delta_{i-1}}\right) \approx \sum_i Y_{\delta_{i-1}} U_{\delta_{i-1}}\left(\delta_i - \delta_{i-1}\right) + \sum_i Y_{\delta_{i-1}} V_{\delta_{i-1}}\left(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}\right)$$

$$\approx \int_0^t Y_s U_s\,ds + \int_0^t Y_s V_s\,dB_s$$

- Variazione quadratica di un processo di Itô

Def Se X è un processo di Itô $\quad dX_t = U_t\,dt + V_t\,dB_t$

la sua var. q. $\langle X \rangle$ è

$$\boxed{\langle X \rangle_t := \int_0^t V_s^2\,ds} \qquad d\langle X \rangle_t = V_t^2\,dt$$

è un processo di Itô

$\star$ Si può dimostrare che

$$\langle X \rangle_t = P\text{-}\lim_{|\delta|\to 0} \sum_{i=1}^{N} \left(X_{\delta_i} - X_{\delta_{i-1}}\right)^2$$

- SEMIMARTINGALE

Def X è una semimartingala se è somma di una martingala locale e un processo adattato, cadlag e localmente BV

★ I processi di Itô sono semimartingale
↳ L'integrazione stocastica rispetto a dX_t si può fare anche se X è solo una semimartingala

FORMULA DI ITÔ PER PROCESSI QUALSIASI (DIM=1)

Thm: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$, B BM. e X processo di Itô,
$dX_t = U_t dt + V_t dB_t$ e $\varphi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\varphi = \varphi(t,x)$ di classe $\mathcal{C}^{1,2}$

$\mathcal{C}^1$ risp al tempo $\mathcal{C}^2$ risp. allo spazio

Allora $\forall t \geq 0$

$$\varphi(t, X_t) - \varphi(0, X_0) = \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X \rangle_s$$

scritto anche:

$$\boxed{d\varphi(t, X_t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, X_t) d\langle X \rangle_t}$$

★ Si può riscrivere come

$$d\varphi(t, X_t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, X_t)\left(U_t dt + V_t dB_t\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, X_t) V_t^2 dt$$

$$= \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U_t \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} V_t^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right] dt + V_t \frac{\partial \varphi}{\partial x} dB_t$$

★ X processo di Itô e $\varphi \in \mathcal{C}^{1,2}$ $\Rightarrow$ $(\varphi(t, X_t))_{t\geq 0}$ proc. di Itô

EQUAZIONI DIFFERENZIALI STOCASTICHE (SDE)

Sono problemi tipo questo:

$$(\star) \qquad \boxed{\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases}}$$

Si cerca X che soddisfi.

I dati del problema sono b e σ : $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ poco regolari
per noi $d=1$

La condizione iniziale x a volte è una v.a. $\mathcal{F}_0$-misurabile

$\longrightarrow$ In particolare B non è un dato del problema

- **Def** Una soluzione debole del problema $(\star)$ su $[0,T]$ è

$$(\underbrace{\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P}_{\text{spazio filtrato}}, B, X)$$ tale che sia soddisfatta $(\star)$

BM (B) proc. stoc. continuo e adattato (X)

$\longrightarrow$ in particolare $(b(t, X_t))_{t\in[0,T]} \in M^1_{loc}$ $\quad (\sigma(t, X_t))_{t\in[0,T]} \in M^2_{loc}$

- **Def** Una soluzione forte del problema $(\star)$ è una soluzione debole per cui X è adattato alla filtrazione naturale di B (o eventualmente al suo completamento)

$\star$ In un problema fisico ci si aspetta che B agisca da "perturbazione" e che nota la traiettoria $B_\cdot(\omega)$ la soluzione $X_\cdot(\omega)$ sia determinata univocamente per q.o.-ω.
Questo succede solo se X è una soluzione forte.
Ci sono esempi di SDE per cui non ci sono soluz. forti ma solo soluz. deboli per cui B è costruito "a posteriori" di X in modo artificioso, per far tornare l'equazione.

Ad esempio: $\quad dX_t = \text{sign}(X_t)dB_t$

- **Def** Si dice che c'è <u>unicità per traiettorie</u> in uno spazio S per il problema (*) se: ogni volta che X e X' sono soluzioni deboli con lo stesso $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P, B)$ con $X, X' \in S$ allora X e X' sono indistinguibili

$\bigstar$ X e X' modificazioni + X, X' continui $\Rightarrow$ X e X' indistinguibili

(ovvio)

- **Def** Si dice che c'è unicità in legge se: ogni volta che $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P, B, X)$ e $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t)_{t\in[0,T]}, P', B', X')$ sono soluzioni deboli di (*), X e X' hanno le stesse leggi finitodimensionali (e quindi su $\mathcal{C}(0,T)$).

THM DI ESISTENZA E UNICITÀ (O BUONA POSIZIONE)

thm: $T \geq 0$, $b: [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma: [0,T] \times \mathbb{R}^n \to M_{n,d}$
b, σ misurabili e tali che $\exists c > 0 : \forall t \in [0,T]\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|b(t,x)|^2 \leq c(1 + |x|^2)$$
$$|\sigma(t,x)|^2 \leq c(1 + |x|^2)$$
$$|b(t,x) - b(t,y)| \leq c|x-y|$$
$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq c|x-y|$$

tesi: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ il problema seguente ha una soluzione forte e vale l'unicità per traiettorie con qualsiasi S

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dB_t \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

moto browniano d-dim

prodotto matrice-vettore

Inoltre $X \in M^2_{0,T}$

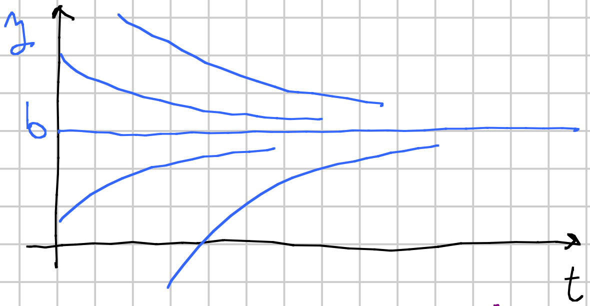
$$X^i_t = X^i_0 + \int_0^t b^i(s, X_s)\,ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma^{ij}(s, X_s)\,dB^j_s \qquad \forall i \in 1, 2, \dots, n$$

- Moto Browniano d-dimensionale

<u>def</u> $B = (B^1, B^2, \dots, B^d)$ con $B^i = \left(B^i_t(\omega)\right)_{\omega\in\Omega, t\geq 0}$ è un BM di dimensione d se $B^1, \dots, B^d$ sono BM scalari indipendenti

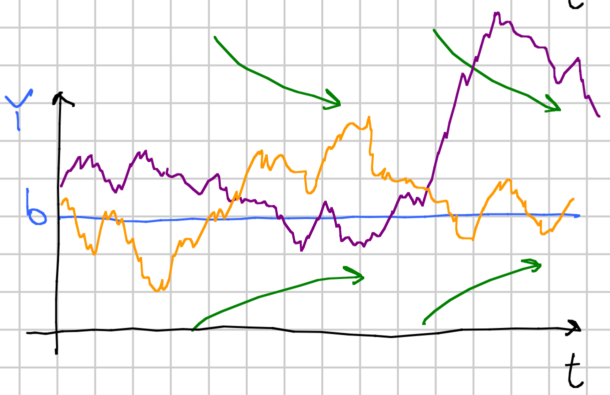
ESEMPI DI SDE

(1) Processo di Ornstein-Uhlenbeck



$$y'(t) = \lambda\left(b - y(t)\right) \qquad \lambda > 0$$

+ noise



$$\begin{cases} dY_t = \lambda(b - Y_t)dt + \sigma dB_t \\ Y_0 = y_0 \end{cases}$$

$$y'(t) = f(t) + g(t)y(t)$$

formula di variazione delle costanti:

$$y(t) = e^{\int_0^t g(s)ds} y_0 + \int_0^t e^{\int_s^t g(u)du} f(s)\, ds$$

provo a imitarla $\qquad dY_t = \overbrace{\lambda b\,dt + \sigma dB_t}^{f} \underbrace{-\lambda}_{g} Y_t\, dt$

candidato: $Y_t = e^{-\lambda t} y_0 + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \lambda b\, ds + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \sigma\, dB_s$ ✓

$$d\left(e^{\lambda t} Y_t\right) = d\varphi(t, Y_t) \underset{\text{formula di Itô}}{=} \lambda e^{\lambda t} Y_t\, dt + e^{\lambda t} dY_t + 0 = (\Delta)$$

$\varphi(t,x) = e^{\lambda t} x \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) = \lambda e^{\lambda t} x \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x) = e^{\lambda t} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t,x) = 0$

$$e^{\lambda t} Y_t = y_0 + \int_0^t e^{\lambda s} \lambda b \, ds + \int_0^t e^{\lambda s} \sigma \, dB_s$$

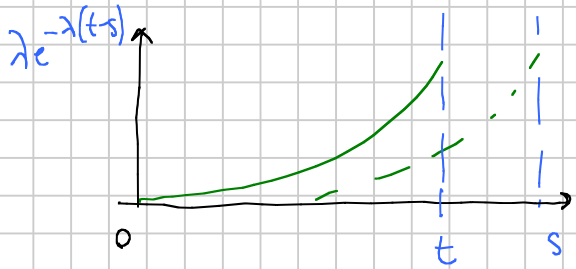
$$d\left(e^{\lambda t} Y_t\right) = \lambda b e^{\lambda t} dt + \sigma e^{\lambda t} dB_t \quad = (\Delta)$$

$(\Delta) \Rightarrow \lambda Y_t \, dt + dY_t = \lambda b \, dt + \sigma dB_t$

$$dY_t = \lambda(b - Y_t)dt + \sigma dB_t \qquad \text{ok}$$

$$Y_t = \underbrace{e^{-\lambda t} y_0}_{\text{tende a } 0} + \underbrace{\int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \lambda b \, ds}_{\text{tende a } b} + \underbrace{\int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \sigma \, dB_s}_{\text{contano le più recenti oscillazioni di } B}$$

ha media 0 e legge gaussiana



★ Nelle ipotesi del teorema :

$$b(t, Y_t)dt = \lambda(b - Y_t)dt \qquad b(t,x) = \lambda(b-x)$$
$$\sigma(t, Y_t)dB_t = \sigma dB_t \qquad \sigma(t,x) = \sigma$$

② Moto Browniano geometrico

$$\begin{cases} dX_t = bX_t \, dt + \sigma X_t \, dB_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

noise moltiplicativo : è proporzionale a X_t, ad esempio è giusto per le oscillazioni azionarie

$$\frac{dX_t}{dt} \approx bX_t + \sigma X_t \frac{dB_t}{dt} \longrightarrow \frac{\frac{dX_t}{dt}}{X_t} = \frac{d}{dt}\log X_t = b + \sigma\frac{dB_t}{dt}$$

$$\log X_t = \int\left(b + \sigma\frac{dB_t}{dt}\right)dt \qquad X_t = e^{bt + \sigma B_t}$$

$$X_t := x_0 e^{\tilde{b}t + \sigma B_t} = \varphi(t, B_t) \qquad \varphi(t,x) = x_0 e^{\tilde{b}t + \sigma x}$$

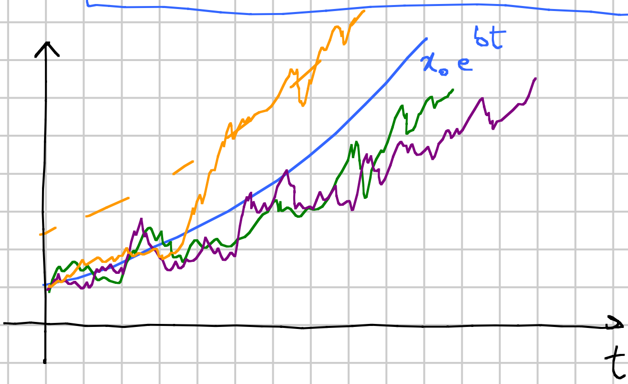
$$dX_t = \tilde{b}X_t\,dt + \sigma X_t\,dB_t + \frac{\sigma^2}{2}X_t\,dt$$

formula di Itô

se pongo $\tilde{b} = b - \frac{\sigma^2}{2}$ viene l'eq. giusta

$$\boxed{X_t = x_0 e^{(b - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}}$$

soluzione : BM geometrico



HW: verificare ipotesi del thm ∃!

$$\boxed{\text{Importante : formula di Itô in dimensione } d}$$