ANALISI STOCASTICA

ora 1

Note Title 09/10/2012

BIBLIOGRAFIA:

Dispense di Caravenna

Dispense di Flandoli ←

Revuz - Yor

Karatzas - Shreve

Baldi

Øksendal

MOTO BROWNIANO

misura di prob.

- Spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\qquad E = E^P = \int_\Omega \cdot \, dP$

enti $\quad$ σ-algebra eventi

$\mathcal{F}$ può (a volte o spesso) essere completata con gli insiemi

$A \subset B, \quad B \in \mathcal{F}, \quad P(B) = 0$

La σ-algebra generata è il completamento

- Variabile aleatoria = funzione misurabile

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (S, \mathcal{A})$$

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$$

- Processo stocastico = famiglia di v.a.

I insieme di indici $\quad (\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, [0,1], \mathbb{N}, \dots)$

$(X_i)_{i \in I}$ $\qquad X_i$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{F})$ a valori in $(S, \mathcal{A})$

- Esempio: processo di Bernoulli

$p \in (0,1)$ $\qquad (X_n)_{n \geq 1}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a valori in $\mathbb{R}$

$P(X_n = 1) = p \qquad P(X_n = 0) = 1 - p \qquad X_n$ tutte indipendenti

(☆ σ-alg generata da v.a. e indipendenza)

$$P(X_1+X_2+\dots+X_n=k) = P\Big(\bigcup_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\ \sum_i^n x_i=k}}\{X_1=x_1, X_2=x_2,\dots X_n=x_n\}\Big) =$$

$$\sum_{x\dots} P(X_1=x_1, X_2=x_2,\dots,X_n=x_n) = \sum_x \prod_{i=1}^n P(X_i=x_i) = \sum_x \prod_{i=1}^n p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

$$=\sum_x p^{\sum_i x_i}(1-p)^{\sum_i(1-x_i)} = \sum_x p^k(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

☆ Morale: per conoscere la legge di un processo stocastico basta conoscere le leggi finito-dimensionali

– Legge di una v.a.

legge di X

$$(\Omega,\mathcal{F},P) \longrightarrow (S,\mathcal{A},\mathcal{L}_X)$$

$$(\Omega,\mathcal{F}) \xrightarrow{X} (S,\mathcal{A})$$

$$\mathcal{L}_X : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$$

$$\mathcal{A} \ni A \longmapsto P(X^{-1}(A)) =: \mathcal{L}_X(A)$$

• esempio: X_1 v.a. di Bernoulli $\quad X_1:(\Omega,\mathcal{F},P)\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$

$A\in\mathcal{B}$ $\quad P(X_1^{-1}(A)) = P(\{\omega\in\Omega : X_1(\omega)\in A\}) =: P(X_1\in A)$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{se } 0,1\in A & \to 1 \\ 0\in A \quad 1\notin A & \to 1-p \\ 0\notin A \quad 1\in A & \to p \\ 0,1\notin A & \to 0 \end{array}\right\} = \mathcal{L}_{X_1}(A) \qquad \mathcal{L}_X = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$$

• esempio: Z v.a. su $(\Omega,\mathcal{F},P)$ a valori in $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ si dice normale standard se $\forall t\in\mathbb{R}$

$$P(Z\le t) = \Phi(t) := \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-s^2/2}\,ds$$

la definizione riguarda solo la legge di Z

$$\mathcal{L}_Z : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$$
$$(-\infty, t] \mapsto \Phi(t)$$

- ancora sui processi stocastici

$$X = (X_i)_{i \in I} \qquad X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (S^I, \mathcal{A}^{\otimes I}, \mathcal{L}_X)$$

$$\mathcal{L}_X(H) = P(X \in H) = ?$$

☆ Per determinare univocamente $\mathcal{L}_X$, la legge del processo basta conoscere le restrizioni finito-dimensionali

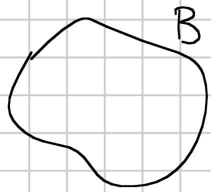
$\forall J = \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subseteq I$ finito

$X_J := (X_j)_{j \in J}$ $\qquad \mathcal{L}_J$ la sua legge su $(S^J, \mathcal{A}^{\otimes J})$

queste sono le leggi finito-dimensionali

$\to \quad \mathcal{L}_J : \mathcal{A}^{\otimes J} \to \mathbb{R} \qquad B \in \mathcal{A}^{\otimes J}$

$$\mathcal{L}_J(B) = P(X_J \in B) = P((X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n}) \in B)$$
$$= P(X \in C_B) = \mathcal{L}_X(C_B)$$



$$C_B := \{(s_i)_{i \in I} \in S^I : (s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_n}) \in B\}$$ insieme cilindrico

☆ Se conosco $\mathcal{L}_J$ $\forall J \subseteq I$ finito, vuol dire che conosco $\mathcal{L}_X(C)$ per ogni insieme cilindrico C

$\mathcal{C} := \{C \subseteq S^I : C \text{ è cilindrico}\}$ è un'algebra
(chiuso rispetto a complementare, intersezioni finite, unioni finite)

$$\mathcal{L}_X : \mathcal{A}^{\otimes I} \longrightarrow \mathbb{R}$$

la σ-algebra prodotto è quella generata dagli insiemi cilindrici

Per poter applicare il teorema di Carathéodory e concludere che $\mathcal{L}_X$ resta definito in maniera univoca su $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}^{\otimes I}$ ci vuole l'ipotesi aggiuntiva che $\mathcal{L}_X$ sia continua in 0 (o σ-additiva)

In realtà se parto (come in questo caso) da X, $\mathcal{L}_X$ esiste, non devo ottenerla come estensione di $\mathcal{L}_J$. Per cui non mi serve la parte di estensione del thm di Carathéodory, ma solo quella di unicità (Lemma di Dynkin)

(☆ lemma di Dynkin)

- THM DI ESTENSIONE (KOLMOGOROV)

(S, d) spazio metrico $\quad \mathcal{A} = \mathcal{B}(S)$

I insieme di indici

$(\mathcal{L}_J)_{J \subseteq I \text{ finito}}$ famiglia di leggi finito-dim su $(S^{|J|}, \mathcal{A}^{\otimes |J|})$

tra loro compatibili:

$$\mathcal{L}_{(i_1, i_2, \dots, i_n)}(B) = \mathcal{L}_{(i_1, i_2, \dots, i_n, \bar{\imath})}(B \times S) \qquad \forall (i_1 \dots i_n, \bar{\imath}) \subseteq I$$

e regolari:

$\forall J \subseteq I \quad |J| = n, \quad \forall \varepsilon > 0, \ \forall B \in \mathcal{A}^{\otimes n} \quad \exists K \in \mathcal{A}^{\otimes n}$ compatto t.c. $K \subseteq B$ e $\mathcal{L}_J(K) \geq \mathcal{L}_J(B) - \varepsilon$

Tesi: $\exists! \, \mathcal{L}_X$ misura di prob su $(S^I, \mathcal{A}^{\otimes I})$ che estende tutti gli $\mathcal{L}_J$

- BIBLIOGRAFIA : anche Williams – Probability with martingales (per le basi)

SUGLI SPAZI MISURABILI

- σ-algebra generata da un insieme

$(\Omega, \mathcal{F})$ $\quad H \subseteq \mathcal{F}$ $\quad \sigma(H)$ la minima σ-alg che contiene H

$$\sigma(H) := \bigcap_{\substack{\mathcal{G} \supseteq H \\ \mathcal{G}\ \sigma\text{-alg} \\ \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}}} \mathcal{G}$$

$\to H \subseteq \sigma(H)$

$\to$ è una σ-alg

$$H \subseteq \sigma(H) \subseteq \mathcal{F}$$

$\to H = \{A\}$ $\qquad \sigma(H) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$

- π-system : un insieme di sottoinsiemi di Ω chiuso rispetto all'intersezione finita

<u>thm</u> : $(\Omega, \mathcal{F})$, $H \subseteq \mathcal{F}$, H un π-system

μ, ν due misure su $\mathcal{F}$

se $\mu = \nu$ su H, allora $\mu = \nu$ su $\sigma(H)$

(no dim ; serve Lemma di Dynkin ; cfr appendice 1 Williams)

- variabile aleatoria = funzione misurabile

$(\Omega, \mathcal{F}) \xrightarrow{X} (S, \mathcal{A})$ $\qquad X^{-1}(A) \in \mathcal{F} \quad \forall A \in \mathcal{A}$

$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-alg. $\qquad X$ è $\mathcal{G}$-mis se $X^{-1}(A) \in \mathcal{G} \quad \forall A \in \mathcal{A}$

<u>def</u> la σ-alg generata da una v.a. X è la più piccola che rende X misurabile

$\sigma(X) := X^{-1}(\mathcal{A}) := \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ è già una σ-alg. $\qquad$ (check)

ovviamente X è $\mathcal{G}$-mis $\quad \forall \mathcal{G} \quad \sigma(X) \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$

N.B. Se ho più variabili aleatorie $X_1, X_2, \dots, X_n$ a valori in $(S, \mathcal{A})$

$$\sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma\big(\sigma(X_1) \cup \sigma(X_2) \cup \dots \cup \sigma(X_n)\big)$$

se pongo $X = (X_i)_{i=1,\dots,n}$ $\qquad X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (S^n, \mathcal{A}^{\otimes n})$

$$X^{-1}(\mathcal{A}^{\otimes n}) = \sigma(X) = \sigma(X_1, \dots, X_n) \qquad \text{(check)}$$

- La misurabilità si può controllare su un insieme di generatori

$X : \Omega \to (S, \mathcal{A})$ con $\mathcal{A} = \sigma(H)$ $\quad H \subseteq 2^S$

se $\mathcal{F}$ è σ-alg su Ω t.c. $X^{-1}(H) \subseteq \mathcal{F}$ allora X è $\mathcal{F}$-misurabile

<u>Dim</u> $\mathcal{H} := \{A \subseteq S : X^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ è sempre una σ-alg. (check)

$H \subseteq \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{A} = \sigma(H) \subseteq \mathcal{H}$

- Lemma di Doob

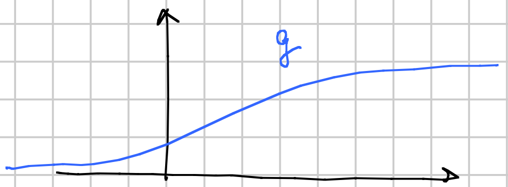
$X : \Omega \to (S, \mathcal{A})$ $\quad \sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{A})$ la σ-alg. generata da X

$Y : (\Omega, \sigma(X)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ v.a.

tesi: $\exists\, f : (S, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ misurabile t.c. $Y = f \circ X$

$$\begin{tikzcd}
(\Omega, \sigma(X)) \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "f \circ X"'] \arrow[drr, bend right, "Y"'] & (S, \mathcal{A}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\tilde{f}"] & (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \\
& & (\mathbb{R}, \mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

<u>Dim</u> Mi riduco a Y limitata, non negativa



$g : \mathbb{R} \to [0,1]$ iniettiva

$g \circ Y$ non neg e limitata

$g \circ Y = f \circ X \Rightarrow Y = \underbrace{g^{-1} \circ f}_{\tilde{f}} \circ X$

$F := \{f : S \to \mathbb{R}^+ \text{ limitate e } \mathcal{A}\text{-mis}\}$

$\mathcal{H} := \{f \circ X : f \in F\} \subseteq \{Y : (\Omega, \sigma(X)) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}) \text{ limitata}\} =: \mathcal{Z}$

devo dimostrare $=$

i. $\forall H \in \sigma(X) \quad \exists A \in \mathcal{A} : H = X^{-1}(A)$

$$\mathbb{1}_H \in \mathcal{R} \qquad \mathbb{1}_H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in H \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } X(\omega) \in A \\ 0 & \dots \end{cases}$$

$$\mathbb{1}_H(\omega) = \mathbb{1}_A(X(\omega)) \qquad \mathbb{1}_H = \mathbb{1}_A \circ X \in \mathcal{H}$$

tutte le indicatrici che stanno in $\mathcal{R}$, stanno in $\mathcal{H}$

ii. tutte le funzioni semplici di $\mathcal{R}$, stanno in $\mathcal{H}$

iii. ogni funzione in $\mathcal{R}$ è limite puntuale di una successione monotona di funzioni semplici (check)

$$\mathcal{R} \ni \underset{\text{semplici}}{Y_n} \uparrow Y \in \mathcal{R} \qquad \mathcal{H} \ni Y_n = f_n \circ X$$

$$\Omega \xrightarrow{X} S \xrightarrow{f_n} \mathbb{R}$$

sull'immagine di X $f_n \nearrow$ e $f_n \circ X \le Y \le C \Rightarrow f_n \le C \;\; \forall n$

$f := \limsup_n f_n \wedge C$

$\forall x \in \operatorname{im} X \qquad f_n(x) \uparrow f(x)$

$$\left.\begin{array}{ll} \forall \omega \in \Omega & Y_n(\omega) = f_n \circ X(\omega) \uparrow f \circ X(\omega) \\ \forall \omega \in \Omega & Y_n(\omega) \uparrow Y(\omega) \end{array}\right\} \; Y = f \circ X$$

ora 3

III INDIPENDENZA

$(\Omega, \mathcal{F}, P) \qquad (\mathcal{F}_i)_{i \in I} \quad \mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F} \quad \sigma$-algebre

def $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ sono indipendenti se $\forall J \subseteq I \quad |J| < \infty$ e per ogni scelta di $E_j \in \mathcal{F}_j$, $j \in J$

$$P\left(\bigcap_J E_j\right) = \prod_J P(E_j)$$

NB. $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ indipendenti se $\forall F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G} \quad P(F \cap G) = P(F)P(G)$

def $(E_i)_{i \in I} \quad E_i \in \mathcal{F}$ sono indipendenti se lo sono le σ-alg. generate
$\sigma(E_i) = \sigma(\{E_i\}) = \{\emptyset, E_i, E_i^c, \Omega\}$

def $(X_i)_{i\in I}$ sono v.a. indipendenti se lo sono le σ-alg. generate

☒ PROCESSI STOCASTICI

$$(\Omega,\mathcal{F}) \xrightarrow{X_i} (S,\mathcal{A}) \qquad X=(X_i)_{i\in I} \qquad X_i \text{ v.a.}$$

$$X:(\Omega,\mathcal{F})\longrightarrow(\mathbb{X},\mathcal{G})$$

$$\mathbb{X}:=S^I \qquad \mathcal{G}:=\mathcal{A}^{\otimes I}=\sigma(\mathcal{D})=\sigma(\mathcal{C})$$

$$\forall J\subseteq I \quad |J|<\infty \quad e \ \forall A\subseteq S^J \qquad A_j\in\mathcal{A} \quad j\in J$$

$$cyl_J(A):=\{x\in S^I : (x_j)_{j\in J}\in A\}$$

$$cyl_J\Big(\prod_{j\in J}A_j\Big)=(\text{moralmente})\quad S\times S\times\ldots\times S\times A_{j_1}\times S\times\ldots\times A_{j_2}\times S\times\ldots\times A_{j_n}\times S\times$$

$$\mathcal{C}_J:=\Big\{cyl_J\Big(\prod_{j\in J}A_j\Big): A_j\in\mathcal{A}\ \forall j\in J\Big\} \qquad \mathcal{C}=\bigsqcup_{\substack{J\subseteq I\\|J|<\infty}}\mathcal{C}_J$$

$$\mathcal{D}_J:=\sigma(\mathcal{C}_J)$$ sono i cilindri dell'ora 1 $$\mathcal{D}=\bigsqcup_{\substack{J\subseteq I\\|J|<\infty}}\mathcal{D}_J$$

$$\begin{tikzcd}
\underset{\pi\text{-system}}{\mathcal{C}_J} \arrow[d, "\bigsqcup_J"'] & \subseteq & \underset{\sigma\text{-algebra}}{\mathcal{D}_J} \arrow[d, "\bigsqcup_J"] & & \\
\underset{\pi\text{-syst}}{\mathcal{C}} & \subseteq & \underset{\text{algebra}}{\mathcal{D}} & \subseteq & \underset{\sigma\text{-alg prodotto}}{\mathcal{G}}
\end{tikzcd}$$

$$C\in\mathcal{C} \qquad X^{-1}(C)=X^{-1}\Big(cyl_J\Big(\prod_{j\in J}A_j\Big)\Big)=\{\omega\in\Omega : X_j(\omega)\in A_j \ \forall j\in J\}$$

$$=\bigcap_{j\in J}\{X_j\in A_j\}=\bigcap_J X_j^{-1}(A_j)$$

Se le X_j sono $\mathcal{F}$-misurabili, $X^{-1}(C)\in\mathcal{F}$. Quindi X è $\mathcal{F}$-mis.
(verificato su un insieme di generatori)

☆ X $\mathcal{F}$-mis sse X_i sono $\mathcal{F}$-mis $(\forall i)$

def la σ-alg generata da un processo stoc. X è la minima che rende X misurabile

$$\sigma(X)=X^{-1}(\mathcal{G})=\sigma\Big(\bigsqcup_{i\in I}\sigma(X_i)\Big)$$

lemma X, Y due processi stoc. a valori in $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$

$\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_Y$ sse coincidono le leggi finito dimensionali

ovvero se coincidono su $\mathcal{C}$ (o su $\mathcal{D}$)

In questo caso si dice che Y è una versione di X

$(\Omega, \mathcal{F}, P, X)$ $(\Omega', \mathcal{F}', P', Y)$

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) \xrightarrow{X} (\mathcal{X}, \mathcal{G}, \mathcal{L}_X)$$

$$(\Omega', \mathcal{F}', P') \xrightarrow{Y} (\mathcal{X}, \mathcal{G}, \mathcal{L}_Y)$$

DEFINIZIONE DI MOTO BROWNIANO

0) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $X = (X_t)_{t \geq 0}$ a valori $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$

1) $X_0 = 0$ q.c.

2) $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ $(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})_{i=1,2,\ldots,n}$ indipendenti

3) $\forall t, s$ $s < t$ $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

4) q.c. $t \longmapsto X_t$ è continua

ANALISI STOCASTICA — ora 4

Note Title — 17/10/2012

MOTO BROWNIANO

0) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad X = (X_t)_{t \geq 0}$ a valori $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$

1) $X_0 = 0$ q.c.

$P(\underbrace{X_0 = 0}_{\in \mathcal{G}}) = 1$ $\qquad P(\underbrace{X^{-1}(\{x \in \mathbb{X} : x_0 = 0\})}_{\mathcal{F}})$ $\quad \{x \in \mathbb{X} : x_0 = 0\} \in \mathcal{G}$

2) $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ $\quad (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})_{i=1,2,\dots,n}$ indipendenti

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{\{X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \in A_i\}}_{\in \mathcal{G}}\Big) = \prod_{i=1}^{n} P(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \in A_i) \quad \forall n\ \forall t_i\ \forall A_i \in \mathcal{B}$$

3) $\forall t, s$ $\quad s < t$ $\quad X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

$$P(\underbrace{X_t - X_s \in A}_{\in \mathcal{G}}) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\, e^{-\frac{u^2}{2(t-s)}}\, du$$

4) q.c. $\quad t \longmapsto X_t$ è continua

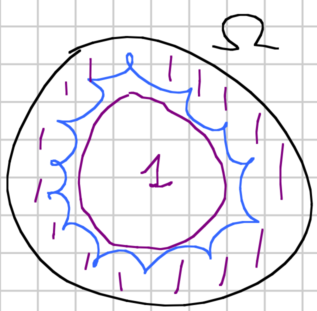
$P(X_\cdot \text{ continua})$ → non è detto che $X^{-1}(A)$ per $A \in \mathcal{G}$

(HW: provare a formalizzare $\{\omega \in \Omega : X_\cdot \text{ continua}\}$)

$X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{X}, \mathcal{G})$ $\qquad \mathbb{X} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ $\quad \mathcal{G} = \mathcal{B}^{\otimes \mathbb{R}_+}$

★ Si può dimostrare che $\mathcal{G}$ è formata dagli eventi che dipendono solo da una quantità numerabile di tempi

(HW: formalizzare e impostare la verifica)



Non è così: non basta completare $\mathcal{G}$ per rendere $C := C([0,\infty); \mathbb{R})$ misurabile

anzi: è facile vedere che $A \in \mathcal{G}$, $A \subseteq C$

$\Rightarrow A = \emptyset$

Quindi non sto cercando una legge su $(\mathbb{X}, \mathcal{G})$ che soddisfi 1–4

Una tale legge non esiste. Vedremo che $\exists!$ una legge che sodd. 1–3

Quindi cerco:

a) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $X = (X_t)_{t \geq 0}$ t.c. 1–4

oppure

traccia di $\mathcal{G}$ su C

b) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (C, \mathcal{H})$ t.c. 1–3

- Che σ-alg metto su C?

Def $(S, \mathcal{A})$ $C \subseteq S$ (non occorre che $C \in \mathcal{A}$)

la traccia di $\mathcal{A}$ su C è

$$\mathcal{H} := \{ C \cap A : A \in \mathcal{A} \}$$

NB.: $\mathcal{H}$ è una σ-algebra su C (non su S ovviamente)

NB2.: $X : \Omega \to S$ $\quad \mathrm{im}\, X \subseteq C \subseteq S$ $\quad \mathcal{A}$ σ-alg su S, $\mathcal{H}$ la traccia su C

per ogni $\mathcal{F}$ σ-alg su Ω

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (S, \mathcal{A}) \quad \text{sse} \quad X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (C, \mathcal{H})$$

Dim: $X^{-1}(\mathcal{A}) = X^{-1}(\mathcal{H})$

Perciò a) $\Leftrightarrow$ b)

c) $\exists$ legge ν su $(C, \mathcal{H})$ t.c. $\xi = (\xi_t)_{t \geq 0}$ soddisfi 1–3

$\omega \in C$ $\quad X_t(\omega) = ?$

$\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$\omega(t) =: \xi_t(\omega)$ proiezioni canoniche

b) $\Rightarrow$ c) basta porre $\nu = \mathcal{L}_X$

c) $\Rightarrow$ b) $(\Omega, \mathcal{F}, P, X) = (C, \mathcal{H}, \nu, \xi)$

- $(C, \mathcal{H})$ si chiama spazio di Wiener

ν si chiama misura di Wiener

★ a) ⇒ b) definisco $\tilde{X}(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{se } X(\omega) \in C \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

allora $(\Omega, \mathcal{F}, P, \tilde{X})$ soddisfa b)

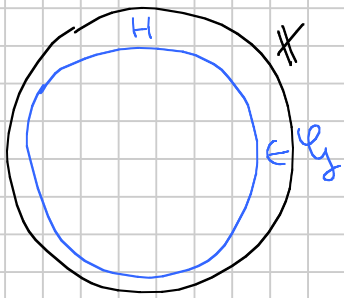
ESISTENZA BM

Strategia

1) thm estensione di Kolmogorov

   partendo da 1-3 costruisco una legge $\mathcal{L}_X$ su $(\mathbb{X}, \mathcal{G})$

2) thm di regolarità di Kolmogorov



H insieme di funzioni Hoelderiane sui diadici di indice α $\forall \alpha < \frac{1}{2}$

$\mathcal{L}_X(H) = 1$

f continua : $\forall t \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \forall s \ \ |t-s| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| < \varepsilon$

f unif. continua : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \forall s,t \ \ |t-s| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| < \varepsilon$

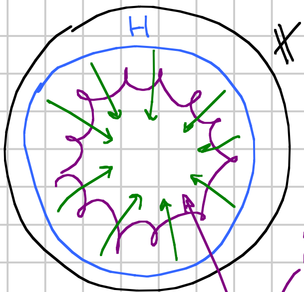
f Lipschitziana : $\exists \delta : \forall s,t \ \ |f(t) - f(s)| \le \delta |t-s|$

f Hoelderiana : $\exists \delta, \alpha : \forall s,t \ \ |f(t) - f(s)| \le \delta |t-s|^{\alpha}$

---

ord 5

3) costruire il processo cercato estendendo per continuità



$\left.\begin{array}{l} H \xrightarrow{Z} \tilde{C} \\ H^c \xrightarrow{Z} \{0\} \in \tilde{C} \end{array}\right\} (\mathbb{X}, \mathcal{G}) \xrightarrow{Z} (C, \mathcal{H})$

$\tilde{C} \subseteq C$

funzioni continue e Hoelderiane $(\alpha < \frac{1}{2})$ su tutti i tempi

Alla fine proveremo a) $(\Omega, \mathcal{F}, P, X) = (\mathbb{X}, \mathcal{G}, \mathcal{L}_X, Z)$

THM DI ESTENSIONE

(S, d) spazio metrico $\mathcal{A} = \mathcal{B}(S)$

I insieme di indici

$(\mathcal{L}^J)_{J \subseteq I \text{ finito}}$ famiglia di leggi finito-dim su $(S^J, \mathcal{A}^{\otimes J})$

tra loro compatibili :

$\forall J_1, J_2 \subseteq I$ finiti $\forall B_1 \in \mathcal{A}^{\otimes J_1}, B_2 \in \mathcal{A}^{\otimes J_2}$

$$cyl_{J_1}(B_1) = cyl_{J_2}(B_2) \Rightarrow \mathcal{L}^{J_1}(B_1) = \mathcal{L}^{J_2}(B_2)$$

e regolari :

$\forall J \subseteq I$ finito, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall B \in \mathcal{A}^{\otimes J}$ $\exists K \in \mathcal{A}^{\otimes J}$ compatto

t.c. $K \subseteq B$ e $\mathcal{L}^J(K) \geq \mathcal{L}^J(B) - \varepsilon$

Tesi : $\exists! \mathcal{L}$ misura di prob su $(\underset{\mathcal{X}}{\underset{\shortparallel}{S^I}}, \underset{\mathcal{G}}{\underset{\shortparallel}{\mathcal{A}^{\otimes I}}})$ che estende tutti gli $\mathcal{L}^J$

<u>Dim</u> Se pongo $\forall A \in \mathcal{D}_J$ $\mathcal{L}(A) := \mathcal{L}^J(B)$ dove $A = cyl_J(B)$ $B \in \mathcal{A}^{\otimes J}$

ho una funzione ben definita su tutto $\mathcal{D} = \bigsqcup_J \mathcal{D}_J$

i. $\mathcal{L}(\emptyset) = 0$

ii. $\mathcal{L}(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{D}$

iii. $\mathcal{L}(A_1 \cup A_2) = \mathcal{L}(A_1) + \mathcal{L}(A_2) \quad \forall A_1, A_2 \in \mathcal{D} \ A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Siccome $\mathcal{D}$ è un π-system (è un'algebra) (check)

l'estensione $\mathcal{L}$ a tutto $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{G}$ è unica se esiste

Per dimostrare che esiste, posso usare Carathéodory.

Basta quindi dimostrare che $\mathcal{L}$ è continua in zero.

cont. in zero : $(A_n)_{n \geq 1}$ $A_n \in \mathcal{D}$ $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ $A_n \downarrow \emptyset$

allora $\mathcal{L}(A_n) \downarrow 0$

" $\lim_n \mathcal{L}(A_n) = \mathcal{L}(\lim_n A_n)$ "

sia $A_n = cyl_{J_n}(B_n) \quad \forall n \geq 1$ con $J_n \uparrow$

1) suppongo i B_n compatti $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{k} A_n = \emptyset$ per $k < \infty$

infatti : RPA $x^{(k)} \in \bigcap_{n=1}^{k} A_n$

$\left(x^{(n)}\right)_{n \geq 1} \in \mathbb{X}$

$x^{(1)} \in A_1 = cyl_{J_1}(B_1) = \left\{ x \in \mathbb{X} : (x_j)_{j \in J_1} \in B_1 \right\}$ $\qquad B_1 \in \mathcal{A}^{\otimes J_1}$

$y^{(1,1)} = \left(y_j^{(1,1)}\right)_{j \in J_1} \qquad y_j^{(1,1)} := x_j^{(1)} \quad \forall j \in J_1 \qquad y^{(1,1)} \in B_1 \subseteq S^{J_1}$

$x^{(n)} \in A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} cyl_{J_k}(B_k)$

$y^{(n,k)} = \left(y_j^{(n,k)}\right)_{j \in J_k} \qquad y_j^{(n,k)} := x_j^{(n)} \quad \forall j \in J_k \qquad 1 \leq k \leq n$

$y^{(n,k)} \in B_k \subseteq S^{J_k}$

$\exists (n_i)_{i \geq 1}$ t.c. $y^{(n_i,1)} \longrightarrow y^{(1)} \in B_1$

$\exists (\tilde{n}_i)_{i \geq 1}$ t.c. $\tilde{n}_i = n_{m_i}$; $\tilde{n}_1 = n_1$; $y^{(\tilde{n}_i,2)} \longrightarrow y^{(2)} \in B_2$

... con un procedimento diagonale è possibile costruire ...

$(\tilde{m}_i)_{i \geq 1}$ t.c. $y^{(\tilde{m}_i,k)} \longrightarrow y^{(k)} \in B_k \quad \forall k \geq 1$

(check ?)

- Dimostrazione del thm di estensione

$(A_n)_{n\geq 1}$, $A_n \subseteq \mathbb{X}$, $A_n \downarrow \emptyset$, $A_n \in \mathcal{D}$ ovvero

$\exists J_n \subseteq I$ finito $\exists B_n \in \mathcal{A}^{\otimes J_n}$ t.c. $A_n = cyl_{J_n}(B_n)$

wlog $J_n \uparrow$

caso 1) B_n sono tutti compatti allora $\bigcap_{n=1}^{k} A_n = \emptyset$ per $k < \infty$

Infatti RPA $\forall k \geq 1$ $\bigcap_{n=1}^{k} A_n \neq \emptyset$ sia $x^{(k)}$ un punto di esso

$(x^{(n)})_{n\geq 1} \in \mathbb{X}$ $\quad x^{(n)} \in A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$

$y^{(n,k)} \in S^{J_k}$ $\quad \forall j \in J_k,\ y_j^{(n,k)} := x_j^{(n)}$ $\quad \forall n \forall k$

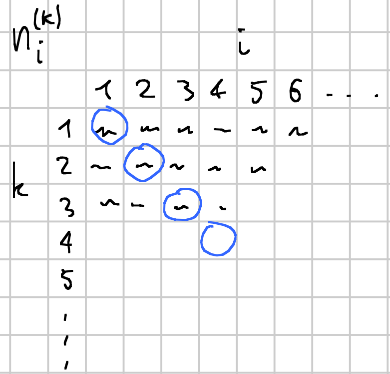
se $k \leq n$ $\quad x^{(n)} \in A_n \subseteq A_k = cyl_{J_k}(B_k) = \{u \in \mathbb{X} : (u_j)_{j\in J_k} \in B_k\}$

$(y_j^{(n,k)})_{j\in J_k} = (x_j^{(n)})_{j\in J_k} \in B_k$ quindi $\boxed{y^{(n,k)} \in B_k \quad \forall k \leq n}$

$\forall k$ $\quad y^{(n,k)} \in B_k$ def$^{\text{ente}}$ quindi ammette una sottosuccessione convergente

$n_i^{(1)}$ la ssc per $k=1$; sia $n_i^{(k)}$ una ssc di $n_i^{(k-1)}$ tale che

$$y^{(n_i^{(k)},k)} \xrightarrow[i\to\infty]{} y^{(k)} \in B_k$$



$\tilde{n}_k := n_k^{(k)}$ sottosuccessione diagonale

$$y^{(\tilde{n}_h,k)} \xrightarrow[h\to\infty]{} y^{(k)} \in B_k$$

$j \in J_k \subseteq J_{k+1}$ $\quad y_j^{(k+1)} = \lim_h y_j^{(\tilde{n}_h,k+1)} = \lim_h x_j^{(\tilde{n}_h)} = \lim_h y_j^{(\tilde{n}_h,k)} = y_j^{(k)}$ $\quad (*)$

Sia $x \in \mathbb{X}$ definito da $x_j := y_j^{(k)}$ dove k tale che $j \in J_k$

questa è una buona definizione per $(*)$

$\forall k \geq 1 \quad \forall j \in J_k \quad x_j = y_j^{(k)}$ ovvero $(x_j)_{j \in J_k} = y^{(k)} \in B_k$ ovvero $x \in A_k$

perciò $\quad x \in \bigcap_{k \geq 1} A_k = \emptyset \quad$ assurdo.

Allora $\exists\, k < \infty$ t.c. $\bigcap_{n=1}^{k} A_n = \emptyset$ ma allora

$$\mathcal{L}(A_k) = 0 \quad \text{e quindi} \quad \mathcal{L}(A_n) \downarrow 0 \qquad \text{fine caso 1)}$$

caso 2) $\quad B_n$ non compatti $\qquad K_n \subseteq B_n$ compatto $\forall n$

$$\mathcal{L}(A_n) := \mathcal{L}^{J_n}(B_n) = \mathcal{L}^{J_n}(K_n) + \varepsilon_n$$

$\leftarrow$ basta sceglierli $\varepsilon_n \to 0$

va a zero per 1)

C.V.D.

(HW: verificare la condizione di compatibilità per BM)

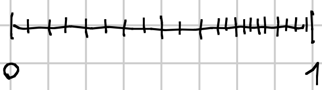
THM DI REGOLARITÀ

$(\Omega, \mathcal{F}, P) \qquad X = (X_t)_{t \in [0,1]} \qquad X_t$ a valori in $\mathbb{R}$

hp: $\quad \exists\, a, b, c > 0$ $b > 1$ t.c. $\quad \forall\, s,t \in [0,1] \quad \mathbb{E}\left(|X_t - X_s|^a\right) \leq c\,|t-s|^b$

ts: $\quad$ per q.o. ω $\quad X_\cdot(\omega)$ è hoelderiana su $D := \bigcup_{n \geq 0} D_n$

dove $D_n = 2^{-n}\mathbb{Z} \cap [0,1]$



$D_0 = \{0, 1\} \qquad D_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\} \qquad D_2 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\} \ldots,$

Lemma di Borel-Cantelli (I)

$(\Omega, \mathcal{F}, P) \qquad (A_n)_{n \geq 1} \qquad A_n \in \mathcal{F}$

se $\sum_{n \geq 1} P(A_n) < \infty$

allora $P(\limsup_n A_n) = 0 \qquad \limsup_n A_n = \{\text{infiniti } A_n \text{ si realizzano}\}$

ANALISI STOCASTICA

ora 7

Note Title 31/10/2012

- Applicazione del thm di estensione alla def di BM

$S = \mathbb{R} \qquad \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad I = [0,\infty)$

$(\Omega, \mathcal{F}, P) \qquad X = (X_t)_{t\geq 0}$ a valori in $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$

Sia $J \subseteq [0,\infty)$ finito $\qquad J = \{t_1, t_2, \dots, t_n\} \qquad t_1 < t_2 < \dots < t_n$

$\mathcal{L}^J : \mathcal{B}^{\otimes J} \to \mathbb{R} \qquad B \in \mathcal{B}^{\otimes J} \qquad B \subseteq \mathbb{R}^J = \{$funzioni da J a $\mathbb{R}\}$

$\mathcal{L}^J(B) = P(X_J \in B)$ dove $X_J = (X_j)_{j\in J}$

$(X_j)_{j\in J} \in B \iff (X_{t_i})_{i=1,\dots,n} \in \tilde{B}$

gli elem. sono funzioni da J in $\mathbb{R}$ $\qquad (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ vettore di $\mathbb{R}^n$

$\tilde{B} = \{u \in \mathbb{R}^n : \varphi_u \in B\}$ dove $u \in \mathbb{R}^n \quad \varphi_u : J \to \mathbb{R} \quad \varphi_u(t_i) = u_i$

$t_i \mapsto u_i \qquad (\varphi_u)_{t_i} = u_i$

$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1})$

$L^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \dots, x_1 + \dots + x_n)$

$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in \tilde{B} \iff (X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \in L\tilde{B}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{L}^J(B) := P\big((Z_1, \dots, Z_n) \in L\tilde{B}\big) \\ \quad \text{dove } Z_i \sim \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1}) \qquad t_0 := 0 \\ \quad \text{indipendenti} \end{array}}$$

- Verifichiamo la condizione di compatibilità per $\mathcal{L}^J$ così definito

$J_1, J_2 \subseteq I$ finiti $\qquad B_i \in \mathcal{B}^{\otimes J_i} \qquad i = 1, 2$

hp : $\quad cyl_{J_1}(B_1) = cyl_{J_2}(B_2)$

ts : $\mathcal{L}^{J_1}(B_1) = \mathcal{L}^{J_2}(B_2)$

$J = J_1 \cap J_2$ gli indici in comune

allora $\exists\, B \in \mathcal{B}^{\otimes J}$: $B_i = \{ y \in \mathbb{R}^{J_i} : (y_j)_{j\in J} \in B \}$ $\quad i = 1,2$

moralmente $B_1 = B \times \mathbb{R}^{J_1 \setminus J}$ $\quad B_2 = B \times \mathbb{R}^{J_2 \setminus J}$

$$cyl_{J_1}(B_1) = \{ x \in \mathbb{X} : (x_j)_{j\in J_1} \in B_1 \} = \{ x \in \mathbb{X} : (x_j)_{j \in J_2} \in B_2 \} = C$$

se $\bar{j} \in J_1 \setminus J$ e $x \in C$ allora $\tilde{x}_j = \begin{cases} x_j & j \neq \bar{j} \\ z & j = \bar{j} \end{cases}$ definisce un $\tilde{x} \in C$ $\quad \forall z$

(così non è facile chiudere; molto meglio se si lavorasse su
$B = \{ y \in \mathbb{R}^J : y_j \in A_j \ \forall j \}$ $\quad A_j \in \mathcal{B}$
ovvero sui cilindri "rettangolari")

wlog verifico $\mathcal{L}^{J_1}(B_1) = \mathcal{L}^J(B)$

wlog verifico il caso in cui ci sia solo un indice in più

Sia $k \in \{1, \dots, n\}$ e $J' = J \setminus \{t_k\}$

B' t.c. $cyl_J(B) = cyl_{J'}(B')$ ovvero $B = \{ y \in \mathbb{R}^J : (y_j)_{j \in J'} \in B' \}$

$$\mathcal{L}^{J'}(B') := P\left((Z'_1, \dots, Z'_{n-1}) \in L\tilde{B}' \right)$$

dove $Z'_i \sim \begin{cases} \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1}) & i \leq k-1 \\ \mathcal{N}(0, t_{k+1} - t_{k-1}) & i = k \\ \mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i) & i \geq k+1 \end{cases}$ indipendenti

$$L\tilde{B} = \{ Lu : u \in \tilde{B} \} = \{ Lu : \varphi_u \in B \} \overset{\uparrow}{=} \{ Lu : \hat{\varphi}_u \in B' \} \overset{\uparrow}{=} \{ Lu : \psi_{\hat{u}} \in B' \} = \{ Lu : \hat{u} \in \tilde{B}' \}$$

$\hat{\varphi}_u := \varphi_u|_{J'}$

$\psi_v : J' \to \mathbb{R}$
$t_1 \to v_1$
$\dots$
$t_{k-1} \to v_{k-1}$
$t_{k+1} \to v_k$
$\dots$
$t_n \to v_{n-1}$

$\hat{u} = (u_1, \dots, \hat{u}_k, \dots, u_n)$

$\hat{\varphi}_u = \psi_{\hat{u}}$

$\tilde{B} = \{ u \in \mathbb{R}^n : \hat{u} \in \tilde{B}' \}$

$(z_1, \dots, z_n) \in L\tilde{B} \iff (z_1, z_1+z_2, \dots, z_1+\dots+z_{k-1}, z_1+\dots+z_k+z_{k+1}, \dots, z_1+\dots+z_n) \in \tilde{B}'$

$(z_1', \dots, z_{n-1}') \in L\tilde{B}' \iff (z_1', z_1'+z_2', \dots, z_1'+\dots+z_{k-1}', z_1'+\dots+z_k', \dots, z_1'+\dots+z_{n-1}') \in \tilde{B}'$

$Z_1 \sim Z_1'$

$\dots$

$Z_{k-1} \sim Z_{k-1}'$

$Z_k + Z_{k+1} \overset{H}{\sim} Z_k'$ hope $\qquad Z_k \sim \mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1})$

$Z_{k+2} \sim Z_{k+1}' \qquad Z_{k+1} \sim \mathcal{N}(0, t_{k+1} - t_k)$

$\dots$

$Z_n \sim Z_{n-1}' \qquad Z_k' \sim \mathcal{N}(0, t_{k+1} - t_{k-1})$

basta verificare che se $X \sim \mathcal{N}(0,a)$ $Y \sim \mathcal{N}(0,b)$ indip.
allora $X+Y \sim \mathcal{N}(0, a+b)$ (check)

ora 8

Abbiamo dimostrato $\exists !\ \mathcal{L}$ su $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}^{\otimes[0,\infty)})$ tale che le proiez canoniche $\xi = (\xi_t)_{t \geq 0}$ soddisfino 1), 2) e 3) nella def di BM.

- Dimostro il Lemma BC.1

hp $(A_n)_{n\geq 1}$ $\quad A_n \in \mathcal{F}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$

$X_n := \mathbb{1}_{A_n}$ $\qquad X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A_n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ $\qquad \mathbb{E}(X_n) = P(A_n)$

$\int \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A)$

$\infty > \sum_1^{\infty} P(A_n) = \sum_1^{\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left(\sum_1^{\infty} X_n\right)$ $\qquad Y := \sum_1^{\infty} X_n$ = # di eventi A_n che si verificano

$Y < \infty$ q.c.

quindi P-q.c. solo un numero finito degli A_n si realizza.

$\ast$ $\limsup_n A_n = \underbrace{\bigcap_{n \geq 1} \underbrace{\bigcup_{k \geq n} A_k}_{\text{almeno uno tra quelli } \geq k \text{ si realizza}}}_{\forall k}$

(check relazioni tra limsup/inf di A_n e X_n)

■ Dimostro il teorema di regolarità

$D = \bigcup_{n \geq 1} D_n$ i diadici

$\Delta_n = \{(p,q) : p,q \in D_n, \ p + 2^{-n} = q\}$ coppie di diadici consecutivi

$n \geq 1 \qquad (p,q) \in \Delta_n$

$|X_p - X_q| \leq \delta |p-q|^\alpha = \delta 2^{-\alpha n}$

$P\left(|X_p - X_q| > \delta 2^{-\alpha n}\right)$

$= P\left(|X_p - X_q|^a > \delta^a 2^{-\alpha a n}\right) \qquad >0$

$\leq \mathbb{E}\left(|X_p - X_q|^a\right) \delta^{-a} 2^{\alpha a n}$

$\leq c\, 2^{-bn} \delta^{-a} 2^{\alpha a n} = c \delta^{-a} 2^{-(b-\alpha a)n}$

disug di Markov

X v.a. non negativa $\in L^1$ $a>0$

$P(X>a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$

$P(e^{\theta X} > e^{\theta a}) \qquad \forall \theta$

$P(\underbrace{\exists (p,q) \in \Delta_n, \ |X_p - X_q| > \delta 2^{-\alpha n}}_{A_n}) = P\left(\bigcup_{\Delta_n} \cdots\right) \leq c\delta^{-a} 2^{-(b-\alpha a - 1)n}$

$\#\Delta_n = 2^n$

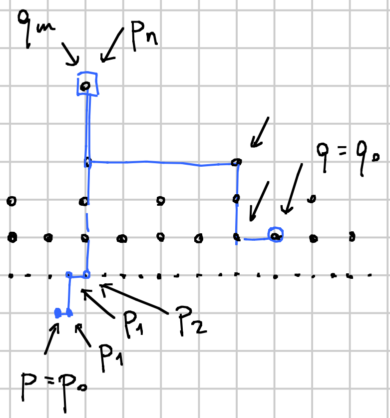
Se $b - \alpha a - 1 > 0$ $\quad \sum_{n \geq 0} P(A_n) < \infty$ allora per BC1

P-q.c. $\exists n_0(\omega) : \forall n \geq n_0 \ \forall (p,q) \in \Delta_n, \ |X_p - X_q| \leq \delta 2^{-\alpha n}$

$\exists \delta(\omega) = \max\left(\delta, 2^{\alpha n}|X_p - X_q|, \ n < n_0, (p,q) \in \Delta_n\right) < \infty$

t.c. $\forall n \ \forall (p,q) \in \Delta_n \ |X_p - X_q| \leq \delta(\omega) 2^{-\alpha n} = \delta(\omega)|p-q|^\alpha$

• Resta da dimostrare la stessa disuguaglianza per $p,q \in D$ qualsiasi



$q = 0{,}0110110\,1001$

$0{,}0110000000000000$

$p = 0{,}0101010010111$

$(p_0, p_1) \in \Delta_{m_1} \qquad m_1 > m_2 > \ldots > m_n$

$(p_1, p_2) \in \Delta_{m_2}$

$\ldots$

$(p_{n-1}, p_n) \in \Delta_{m_n} \qquad p_n - p_0 \geq p_n - p_{n-1} = 2^{-m_n}$

$|X_{p_n} - X_{p_0}| \leq \sum_{k=1}^n |X_{p_k} - X_{p_{k-1}}| = \sum_{k=1}^n \delta(\omega) 2^{-\alpha m_k} \leq \sum_{i \geq m_n} \delta(\omega) 2^{-\alpha i} = \dfrac{\delta(\omega) 2^{-\alpha m_n}}{1 - 2^{-\alpha}}$

$\leq \dfrac{\delta(\omega)|p_n - p_0|^\alpha}{1 - 2^{-\alpha}}$

$$|X_p - X_q| \leq |X_p - X_{p_n}| + |X_{q_m} - X_q| \leq \frac{\delta(\omega)}{1-2^{-\alpha}} \left(|p-p_n|^\alpha + |q-q_m|^\alpha \right)$$

$$\leq \frac{2\delta(\omega)}{1-2^{-\alpha}} |p-q|^\alpha$$

check : $\alpha > 0$ $\quad b - \alpha a - 1 > 0 \iff \alpha < \frac{b-1}{a}$ $\quad$ ok perché $b > 1$

P-q.c. $X_\cdot$ è α-Hoelderiana per ogni $\alpha < \frac{b-1}{a}$

(HW : $Z \sim \mathcal{N}(0,s)$ $\quad E(Z^{2n}) = (2n-1)!!\, s^n$)

Si deduce che per i BM $X_\cdot$ è α-H. per ogni $\alpha < \frac{1}{2}$

- Chiudo la questione $cyl_{J_1}(B_1) = cyl_{J_2}(B_2) \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}^J$ $J = J_1 \cap J_2$ t.c. $cyl_J(B) = cyl_{J_i}(B_i)$ $i = 1,2$

$$\boxed{cyl_{J_1}(B_1) = \{x \in \mathbb{R}^I : (x_j)_{j \in J_1} \in B_1\}}$$

$A \cap B = \emptyset$ $f: A \to \mathbb{R}$ $g: B \to \mathbb{R}$

$f \cup g : A \cup B \to \mathbb{R}$ $f \cup g := f \mathbb{1}_A + g \mathbb{1}_B$

$$\hat{B}_1 := \{y \in \mathbb{R}^J : \exists z \in \mathbb{R}^{J_1 \setminus J} \text{ t.c. } y \cup z \in B_1\}$$

$$\check{B}_1 := \{y \in \mathbb{R}^J : \forall z \in \mathbb{R}^{J_1 \setminus J} \text{ t.c. } y \cup z \in B_1\}$$

$$cyl_J(\check{B}_1) \subseteq cyl_{J_1}(B_1) \subseteq cyl_J(\hat{B}_1)$$

ma da $cyl_{J_1}(B_1) = cyl_{J_2}(B_2)$ deduco che se $x \in cyl_{J_1}(B_1)$ e $j_0 \in J_1 \setminus J$ se in x cambio solo x_{j_0}, $j_0 \notin J_2$ allora $\tilde{x} \in cyl_{J_2}(B_2)$. Quindi

$$\check{B}_1 = \hat{B}_1 = \check{B}_2 = \hat{B}_2 =: B$$

- Relazione $\limsup A_n$ / $\limsup \mathbb{1}_{A_n}$ $Y := \sum_1^\infty \mathbb{1}_{A_n}$

$$\mathbb{1}_{\limsup_n A_n} = \limsup_n \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{Y=\infty}$$

(infatti $\sup_n \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\bigcup_n A_n}$ e $\inf_n \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\bigcap_n A_n}$)

perciò $P(\limsup_n A_n) = P(Y = \infty) = 0$. (Nella dim. di BC. 1)

RECAP BM

(I) $0) - 3) \Rightarrow P(X_J \in B) = \mathcal{L}^J(B) := P((Z_1, \dots, Z_{|J|}) \in \mathcal{L}\vec{B})$

$\Rightarrow$ compatibilità $\Rightarrow$ ip del thm di estensione

$\Rightarrow \exists! \ \mathcal{L}_X$ su $(\mathbb{X}, \mathcal{G})$ t.c. $1) - 3)$

(II) $\mathbb{E}(|X_t - X_s|^{2n}) = c_n |t-s|^n$ + thm di regolarità

$\Rightarrow \mathcal{L}_X(H_{k, \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}}) = 1$

dove $H_{k,\alpha} := \{x \in \mathbb{X} : \forall \beta < \alpha, \ x \text{ è } \beta\text{-Hoelderiana su } D \cap [k-1; k]\}$

dove $D := \bigcup_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \mathcal{L}_X(H) = 1$ dove $H := \bigcap_{k,n} H_{k, \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}} = \{x \in \mathbb{X} : \forall \alpha < \frac{1}{2} \ x \text{ è } \alpha\text{-H su } D\}$

(III) $Z : (\mathbb{X}, \mathcal{G}) \longrightarrow (C, \mathcal{H})$

proiezioni canoniche $\mathbb{X} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} \to \mathbb{R}$

$$Z_t(x) := \begin{cases} x_t =: \xi_t(x) & \text{se } t \in D, x \in H \\ \lim_{\substack{s \to t \\ s \in D}} \xi_s(x) & \text{se } t \notin D, x \in H \\ 0 & \text{se } x \notin H \end{cases}$$

$Z_\cdot(x)$ è continua per costruzione $\forall x \in \mathbb{X}$

è anche α-Hoeld. per ogni $\alpha < \frac{1}{2}$ (check)

- Verifico infine che $(\mathbb{X}, \mathcal{G}, \mathcal{L}_X, Z)$ soddisfa $1) - 3)$

$t \geq 0$ se $t \in D$ $Z_t = \xi_t$ su H quindi $\mathcal{L}_X$-q.c.

se $t \notin D$ $\xi_s \xrightarrow[s \to t]{} Z_t$ $\mathcal{L}_X$-q.c.

$\xi_s \xrightarrow[s \to t]{} \xi_t$ in $L^{2n}(\mathbb{X}, \mathcal{G}, \mathcal{L}_X)$

entrambe $\Rightarrow$ convergenza in probabilità

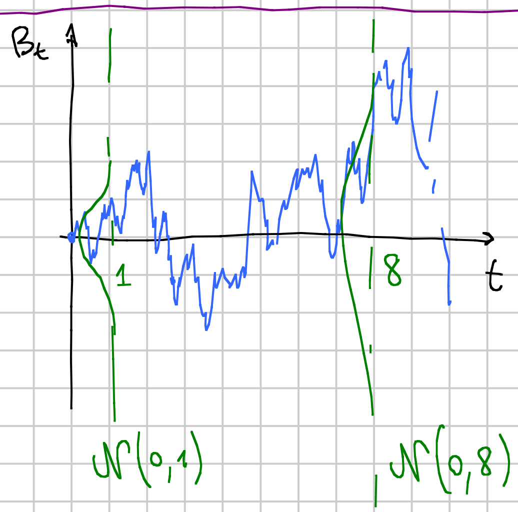
Il limite in probabilità è unico. (check)

Allora $\forall t$ $Z_t = \xi_t$ q.c. quindi le leggi finito-dimensionali di Z e ξ coincidono. Perciò Z soddisfa $1) - 3)$

• **Def** Due processi X, X' definiti su spazi eventualmente diversi ma a valori nello stesso spazio sono equivalenti se hanno le stesse leggi finito-dimensionali. Si dice anche che sono versioni.
Se X, X' sono definiti sullo stesso spazio sono modificazioni (l'uno dell'altro) se $\forall t$ q.c. $X_t = X'_t$
(corretto nell'ora 11)
Se invece si ha che q.c. $\forall t$ $X_t = X'_t$ si dice che X e X' sono indistinguibili

★ Z è una modificazione di ξ ma i due processi non sono indistinguibili

ora 10



• Proprietà: se B è BM allora
$Cov(B_s; B_t) = \min(s,t) \quad \forall s,t \geq 0$

$$\boxed{\begin{aligned} Cov(X;Y) &:= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)] \\ &= \dots = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y \end{aligned}}$$

Dim: i. $s=t$ $\quad Cov(B_s; B_t) = Var(B_s) = s$

ii. wlog $s<t$ $\quad B_t = B_s + (B_t - B_s)$

$$Cov(B_s; B_t) = Cov(B_s; B_s + (B_t - B_s)) = \underbrace{Cov(B_s; B_s)}_{=s} + \underbrace{Cov(B_s; B_t - B_s)}_{=0} = s$$

• **Def** Un processo X a valori reali si dice gaussiano se $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ è un vettore gaussiano $\forall \{t_i ; i=1,\dots,n\}$

• **Def** Un vettore aleatorio $(X_1, \dots, X_n)$ si dice gaussiano se $\forall a \in \mathbb{R}^n$ $a \cdot X$ è una v.a. gaussiana

HW: costruire (X,Y) t.c. X e Y sono gaussiane ma (X,Y) no.

★ Se $X_1, \dots, X_n$ sono gaussiane e indipendenti, sono un vettore gaussiano

- **Def** Un processo gaussiano X si dice centrato se $\mathbb{E} X_t = 0 \quad \forall t$
- **Proposizione**: Il BM è l'unico processo gaussiano centrato a traiettorie continue t.c. $\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = \min(s,t)$
- **Teorema**: Data una funzione $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ t.c. $\forall\, t_1, t_2, \dots, t_n$ $M_{i,j} := f(t_i, t_j)$ definisce una matrice semi-definita positiva. Allora $\exists!$ processo gaussiano centrato su $(\mathbb{X}, \mathcal{G})$ tale che f sia la sua covarianza.

Dim (thm): è il thm di estensione di Kolmogorov limitato al caso dei processi gaussiani
Basta verificare che f con quelle proprietà definisce delle leggi finito-dimensionali compatibili

$J \subseteq \mathbb{R}_+$ finito $\quad J = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$

$\mathcal{L}^J(B) := P((Z_1, \dots, Z_n) \in \tilde{B})$ (vedi ora 7)

dove $Z \sim \mathcal{N}(0; M)$

★ la verifica della compatibilità è facile ma noiosa

Dim (prop) 1) BM è un processo gaussiano

$t_1, \dots, t_n \qquad (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = L^{-1}(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$

$L(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) := (X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$

$a \in \mathbb{R}^n \qquad a \cdot (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = a^T (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$

$= \underbrace{a^T L^{-1}}_{b^T} (X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ gaussiana

indip $\Rightarrow$ vettore gaussiano

2) BM è centrato (ovvio) $\qquad B_t = \underbrace{B_t - B_0}_{\mathcal{N}(0,\ )} + \underbrace{B_0}_{0}$

3) M è semi def. positiva. Fisso $a \in \mathbb{R}^n$

$$Z = a \cdot (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = \sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i}$$

$$0 \le Var(Z) := Cov(Z; Z) = Cov\left(\sum_i a_i X_{t_i}; \sum_j a_j X_{t_j}\right) = \sum_{i,j} a_i a_j Cov(X_{t_i}; X_{t_j})$$

$$= \sum_{i,j} a_i M_{ij} a_j = a^T M a$$

$\forall a \in \mathbb{R}^n \quad a^T M a \ge 0$ semidef. positiva

4) L'unicità segue dal thm.

HW: B sia BM $\quad X_t := \int_0^t B_s \, ds \quad Y_t : B_t - B_1 t \quad t \in [0;1]$

dimostrare che X_t e Y_t sono processi gaussiani centrati e determinare le funzioni di covarianza.

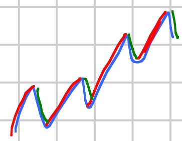
urti casuali microscopici

$$X' = a(X) + f \qquad B' = f$$

white noise (processo gaussiano centrato in qualche senso)

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \left(a(X(s)) + B'_s\right) ds$$

$$= X(0) + \int_0^t a(X(s))\,ds + \underbrace{\int_0^t f(s)\,ds}_{F(t) \overset{?}{=} B(t)}$$



$$X' = a(X) + b(X) f$$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(X(s))\,ds + \underbrace{\int_0^t b(X(s)) f(s)\,ds}_{\int_0^t b(X(s))\,dF(s)}$$

Il motivo per cui la variazione quadratica di B è importante è che è la chiave per definire $\int_0^t X(t)\,dB_t$ l'integrale di Itō

ANALISI STOCASTICA ora 11

Note Title 13/11/2012

- Controesempio al "vettore gaussiano"

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ voglio $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ ma $X+Y$ non gaussiana

allora (X,Y) non è un vettore gaussiano nonostante le componenti lo siano

Z v.a. a valori in $\{-1;1\}$ $P(Z=1)=p \in (0,1)$ Z, X indipendenti

$Y := ZX$

$\therefore t \in \mathbb{R}$
$$P(Y \le t) = P(\overset{X}{\overset{\shortparallel}{Y}} \le t \mid Z=1)P(Z=1) + P(\overset{-X}{\overset{\shortparallel}{Y}} \le t \mid Z=-1)P(Z=-1)$$
$$= P(X \le t \mid Z=1)\,p + P(X \geq -t \mid Z=1)(1-p)$$
$$= F_X(t)\,p + (1-\underbrace{F_X(-t)}_{=1-F_X(t) \text{ per simmetria}})(1-p) = F_X(t)$$

$X+Y = X+ZX = X(Z+1)$ $P(X+Y=0) = P(Z=-1) = 1-p > 0 \Rightarrow X+Y \not\sim \mathcal{N}$

(X,X) $(X,-X)$ sono considerati vettori gaussiani

perché v.a. costanti sono casi degeneri di $\mathcal{N}$

$\star$ $\mathrm{Cov}(X;Y) := \mathbb{E}[(X-E(X))(Y-E(Y))] = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(ZX^2) \overset{\text{indip}}{=} \underbrace{\mathbb{E}(Z)}_{1\cdot p - 1(1-p)} \underbrace{\mathbb{E}(X^2)}_{1} = 2p-1$

Matrice di covarianza $\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ $x = 2p-1 \in (-1;1)$

Si può costruire il controesempio con qualunque matrice di covarianza

VARIAZIONE TOTALE E VARIAZIONE QUADRATICA

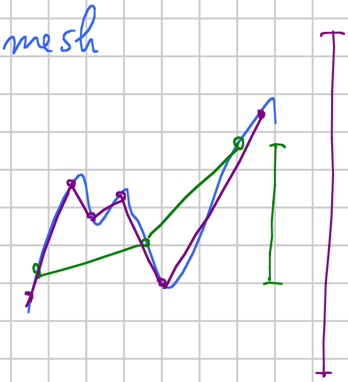
Considero $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ fissato

$$\Delta := \Delta_{[a,b]} := \bigcup_{n \geq 1} \{(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : a = \delta_0 < \delta_1 < \dots < \delta_n = b\}$$

$\delta \in \Delta$ $|\delta| := \max_i (\delta_i - \delta_{i-1})$ mesh

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$I = I_f : \Delta \to \mathbb{R}$ $\delta \mapsto \sum_{i=1}^{N_\delta} |f(\delta_i) - f(\delta_{i-1})|$



$\star$ Se $\delta^{(1)} \geq \delta^{(2)}$ allora $I(\delta^{(1)}) \geq I(\delta^{(2)})$

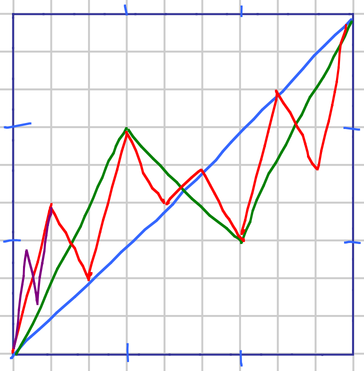
$$|f(x)-f(z)| \leq |f(x)-f(y)| + |f(y)-f(z)| \quad \text{(per induzione)}$$

def Variazione totale su $[a,b]$ di f $\qquad V(f) \in [0,\infty]$

$$V(f) = V_{[a,b]}(f) := \sup_{\Delta} I(\delta) \overset{?}{=} \lim_{|\delta|\to 0} I(\delta)$$

continuità di f

f è BV se $V(f) < \infty$



$$T = T_f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \delta \longmapsto \sum_{i=1}^{N_\delta} |f(\delta_i) - f(\delta_{i-1})|^2$$

def Variazione quadratica su $[a,b]$ di f

$$\sup_{\Delta} T(\delta) \qquad \lim_{|\delta|\to 0} T(\delta) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\substack{\delta\in\Delta \\ |\delta|<\varepsilon}} T(\delta)$$

sono definizioni diverse e non compatibili
l'unica cosa che posso dire è che sono tutte infinite o sono tutte finite

def $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\qquad X = (X_t)_{t\geq 0}$ processo stocastico
$\langle X \rangle = \langle X, X \rangle$ variazione quadratica di X è un proc. st. $\langle X \rangle_t$ tale che

$$T_X^{[0,t]}(\delta) \xrightarrow[|\delta|\to 0]{P} \langle X \rangle_t$$

---

ora 12

- La variazione quadratica di B_t è t

$$T_B^{[0,t]}(\delta) = \sum_{i=1}^{N_\delta} (B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2 =: T$$

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{i=1}^{N_\delta} \mathbb{E}\left[(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2\right] = \sum_{i=1}^{N_\delta} (\delta_i - \delta_{i-1}) = \delta_N - \delta_0 = t - 0 = t$$

$\mathcal{N}(0, \delta_i - \delta_{i-1})$

$$\mathrm{Var}(T) = \sum_{i=1}^{N_\delta} \mathrm{Var}\left[(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2\right] = \sum_i \left\{ \mathbb{E}\left[(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^4\right] - (\delta_i - \delta_{i-1})^2 \right\}$$

indipendenza incrementi $\qquad\qquad \mathcal{N}(0, \delta_i - \delta_{i-1})$

$$= \sum_i \left(3(\delta_i - \delta_{i-1})^2 - (\delta_i - \delta_{i-1})^2\right) = 2\sum_{i=1}^{N} (\delta_i - \delta_{i-1})^2$$

$$\leq 2|\delta| \sum_{i=1}^{N} (\delta_i - \delta_{i-1}) = 2|\delta| t$$

$Z \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$
$\mathbb{E}(Z^4) = 3\sigma^4$

Cosa significa $T(\delta) \xrightarrow[|\delta|\to 0]{L^2} t$?

questa cosa qui: $\underbrace{\mathbb{E}\left[\left(T(\delta) - t\right)^2\right]}_{= \mathrm{Var}(T(\delta))} \xrightarrow[|\delta|\to 0]{} 0$

Convergenza in L^2 $\Rightarrow$ in probabilità allora:

$$\boxed{\langle B\rangle_t = t}$$

◉ Oss: $\langle X\rangle_{t+s} - \langle X\rangle_t = \lim_\delta \left(T_X^{[0,t+s]}(\delta) - T_X^{[0,t]}(\delta)\right) = \lim_\delta T_X^{[t,t+s]}(\delta) \geq 0$

$\langle X\rangle_t$ è non decrescente sempre

★ convergenza in prob. $\Rightarrow$ $\exists$ sottosuccessione per cui la convergenza è q.c.

$(\delta^{(n)})_{n\geq 1}$ $\quad \delta^{(n)} \in \Delta$ $\quad |\delta^{(n)}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$T_X(\delta^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \langle X\rangle_t$ $\quad \exists\, (n_k)_{k\geq 1} : T_X(\delta^{(n_k)}) \xrightarrow[k\to\infty]{q.c.} \langle X_t\rangle$

★ Non vale il limite q.c. anzi: per q.o. $\omega \in \Omega$
$B_\cdot(\omega)$ ha variazione quadratica infinita su ogni intervallo $[a,b]$

★ Nel caso del BM data una qualunque successione $\delta^{(n)}$ tale che $|\delta^{(n)}| \to 0$ e anche $\delta^{(n+1)} \geq \delta^{(n)}$, si ha convergenza q.c.

Dim nel caso particolare $\delta^{(n)}_{[0,t]} = 2^{-n} \cdot t \cdot (0, 1, 2, \dots, 2^n)$

$\mathrm{Var}(T(\delta^{(n)})) \leq 2 \cdot 2^{-n} \cdot t$

$P(|T(\delta^{(n)}) - t| > \varepsilon) \leq \frac{2t}{\varepsilon^2} 2^{-n}$

sommabile! Uso BC.

Chebyshev: $X \in L^2$ $\quad E(X) = \mu$
$P(|X-\mu| > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$

q.c. $|T(\delta^{(n)}) - t| \le \varepsilon$ def$^{\text{ente}}$ $\Rightarrow$ q.c. $\limsup_n |T(\delta^{(n)}) - t| = 0$

$$\bigcap_{\substack{\varepsilon \downarrow 0 \\ \varepsilon \in \mathbb{Q}}}$$

$\Rightarrow T(\delta^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} t$

★ Stessa dim: per il BM la convergenza è q.c. anche se $|\delta^{(n)}|$ è sommabile

HW: determinare $\langle X \rangle$ con $X_t = \alpha B_t$, $X_t = t B_t$, $X_t = B_t^2$, $X_t = \int_0^t B_s \, ds$

■ BM q.c. ha variazione totale infinita su ogni intervallo

Dim $[a,b]$ fissato, sia $\omega \in \Omega$: $B_\cdot(\omega)$ ha variaz. limitate su $[a,b]$

$\Delta = \Delta_{[a,b]}$ $\qquad \delta^{(n)} \in \Delta \qquad |\delta^{(n)}| \to 0$

$$T_{B_\cdot(\omega)}(\delta^{(n)}) = \sum_{i=1}^{N} \left(B_{\delta_i^{(n)}}(\omega) - B_{\delta_{i-1}^{(n)}}(\omega) \right)^2$$

$$\le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left| B_{\delta_i^{(n)}}(\omega) - B_{\delta_{i-1}^{(n)}}(\omega) \right|}_{\le V(B_\cdot(\omega))} \underbrace{\max_i \left| B_{\delta_i^{(n)}}(\omega) - B_{\delta_{i-1}^{(n)}}(\omega) \right|}_{\text{tende a zero quando } |\delta^{(n)}| \to 0 \text{ per uniforme continuità}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \varepsilon_1 > 0 : |\delta_i - \delta_{i-1}| < \varepsilon_1 \Rightarrow |B_{\delta_i}(\omega) - B_{\delta_{i-1}}(\omega)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n : |\delta^{(n)}| < \varepsilon_1 \Rightarrow \max_i |\ldots| < \varepsilon$

Ho dimostrato che

$$T_{B_\cdot(\omega)}(\delta^{(n)}) \to b - a \Rightarrow V(B_\cdot(\omega)) = +\infty$$

Fissati a, b $\exists \, \delta^{(n)}$ t.c. $T \xrightarrow{q.c.} b - a$ $\Rightarrow \exists H_{ab} \in \mathcal{F}$ con $P(H) = 1$ tale che $V(B) = +\infty$ su $H_{a,b}$

Faccio $\bigcap_{a,b \in \mathbb{Q}} H_{a,b} = H \in \mathcal{F}$ t.c. $P(H) = 1$

Per ogni $\omega \in H$, dato un qualunque intervallo reale $[a,b]$, esso contiene un intervallo razionale $[p,q]$ e $V^{[a,b]}(B_\cdot(\omega)) \ge V^{[p,q]}(B_\cdot(\omega)) = +\infty$

HW: BM q.c. su ogni intervallo non è Hoelderiano di esponente $> \frac{1}{2}$

■ BM q.c. su ogni intervallo non è Hoelderiano di esponente $> \frac{1}{2}$

Dim $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $\Delta = \Delta_{[a,b]}$, $(\delta^{(n)})_{n\geq 1}$, $|\delta^{(n)}| \to 0$,

$\omega \in \Omega$: $B_\cdot(\omega)$ sia α-Hoelderiana $\alpha > \frac{1}{2}$ $\alpha^{-1} < 2$

$$|B_x(\omega) - B_y(\omega)| \leq C|x-y|^\alpha \Rightarrow |B_x(\omega) - B_y(\omega)|^{\alpha^{-1}} \leq C'|x-y|$$

$$T_{B_\cdot(\omega)}(\delta^{(n)}) := \sum_{i=1}^N \left(B_{\delta_i^{(n)}} - B_{\delta_{i-1}^{(n)}}\right)^2 \leq \underbrace{\sum_{i=1}^N C'(\omega)(\delta_i^{(n)} - \delta_{i-1}^{(n)})}_{c'(\omega)(b-a)} \underbrace{\max_i \left(B_{\delta_i^{(n)}} - B_{\delta_{i-1}^{(n)}}\right)^{2-\alpha^{-1}}}_{\text{per unif. cont di } B \text{ tende a } 0 \text{ per } n\to\infty}$$

Se $\omega \in \Omega$ è tale che $\boxed{T_{B(\omega)}(\delta^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} b-a}$

allora $B_\cdot(\omega)$ non è α-Hoeld. per nessun $\alpha > \frac{1}{2}$

- Scelgo $(\delta^{(n)})_{n\geq 1}$ con convergenza q.c. Allora $\exists\, H_{a,b} : P(H_{a,b}) = 1$ e $\forall \omega \in H_{a,b}$, $B_\cdot(\omega)$ non è α-H. su $[a,b]$ per $\alpha > \frac{1}{2}$
- $H = \bigcap_{\substack{a<b \\ a,b\in\mathbb{Q}}} H_{a,b}$ $P(H) = 1$ fine.

★ NB. q.c. $B_\cdot$ non è neanche $\frac{1}{2}$-Hoeld (difficile)

★ NB. q.c. $B_\cdot$ non è derivabile in t $\forall t$.

★ q.c. $B_\cdot$ ha variazione quadratica infinita, se si definisce in modo classico. Ovviamente con la definizione speciale data in precedenza $B_\cdot$ ha variazione quadratica $b-a$ su $[a,b]$.

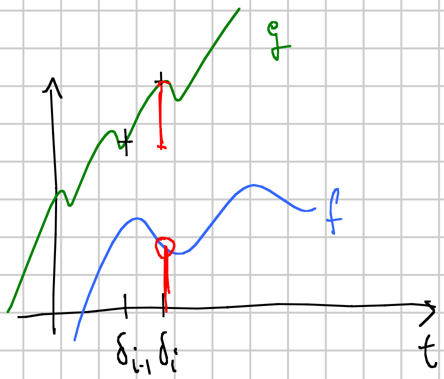
FUNZIONI BV E INTEGRALE DI STIELJES

- $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua

  $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ BV   variazione limitata

in questo caso non importa se δ_i, δ_{i-1}, $\frac{\delta_i+\delta_{i-1}}{2}$ o altro

è possibile definire : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dg(t) := \lim_{|\delta|\to 0}\sum_{i=1}^{N} f(\delta_i)\big(g(\delta_i)-g(\delta_{i-1})\big)$



μ misura su $[0,1]$ $\mu \ll \mathcal{L}$

$F:[0,1]\to\mathbb{R}_+$ $F(t)=\mu([0,t])$

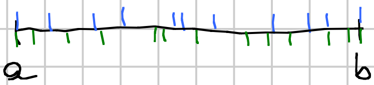
$f=\dfrac{d\mu}{d\mathcal{L}}$ $f(t)=F'(t)$

$$\int_0^1 h(t)\,d\mu(t) = \int_0^1 h(t)f(t)\,dt = \int_0^1 h(t)\,dF(t)$$

$$= \lim_{|t|\to 0}\sum_{i=1}^{N} h(t_i)\big(\underbrace{F(t_i)-F(t_{i-1})}_{\mu(t_{i-1},t_i)}\big)$$

Dim che il limite esiste : la successione è di Cauchy

$\delta,\delta'\in\Delta$ $|\delta|,|\delta'|<\varepsilon$ $\pi\geq\delta,\delta'$



$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} f(\delta_i)\big(g(\delta_i)-g(\delta_{i-1})\big)}_{I} - \underbrace{\sum_{j=1}^{N'} f(\delta'_j)\big(g(\delta'_j)-g(\delta'_{j-1})\big)}_{I'}$$

$$I=\sum_{i=1}^{N_\pi} f(\delta_{j(i)})\big(g(\pi_i)-g(\pi_{i-1})\big) \qquad j(i)=\min\{k:\delta_k\geq\pi_i\}$$

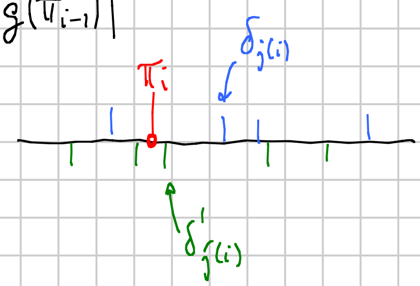
$$I'=\sum_{i=1}^{N_\pi} f(\delta'_{j'(i)})\big(g(\pi_i)-g(\pi_{i-1})\big) \qquad j'(i)=\min\{k:\delta'_k\geq\pi_i\}$$

$$|I-I'|\leq\sum_{i=1}^{N_\pi}\left|f(\delta_{j(i)})-f(\delta'_{j'(i)})\right|\cdot\left|g(\pi_i)-g(\pi_{i-1})\right|$$

wlog $\delta_{j(i)}>\delta'_{j'(i)}$

$\delta_{j(i)-1}<\pi_i<\delta'_{j'(i)}$

$\delta_{j(i)}-\delta'_{j'(i)}<\delta_{j(i)}-\delta_{j(i)-1}<\varepsilon$



Siccome f unif. continua, $\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists \varepsilon > 0 : |x-y| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon_1$

$$|I - I'| \leq \varepsilon_1 \underbrace{\sum_{i=1}^{N_\pi} |g(\pi_i) - g(\pi_{i-1})|}_{\text{converge, oppure } \leq V(f)} \leq \varepsilon_1 V(f)$$

HW: $\displaystyle\int_0^1 dB_t \overset{?}{=} B_1 \qquad \int_0^1 dB_t \overset{?}{=} \lim_{|t| \to 0} \sum_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$

Verificare che se f è continua e g è BV, allora

$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dg(t) \qquad \int_0^1 g(t)\,df(t)$ esistono entrambi

e sono legati dalla formula di integrazione per parti

* $\displaystyle\int_0^t B_s\,ds = \int_0^t ?\, dB_s + ?$

- Integrazione alla Stieltjes – formule "per parti"

f continua $\quad g$ BV $\qquad \delta \in \Delta_{[a,b]} \quad a=\delta_0 < \dots < \delta_N = b$

$$\int_a^b f(t)\,dg(t) := \lim_{|\delta|\to 0} \sum_{i=1}^N f(\delta_i)\big(g(\delta_i)-g(\delta_{i-1})\big)$$

$$\int_a^b g(t)\,df(t) \overset{?}{=} \lim_{|\delta|\to 0} \sum_{i=1}^N g(\delta_i)\big(f(\delta_i)-f(\delta_{i-1})\big) \qquad \text{converge}$$

$$\sum_{i=1}^N g(\delta_i)\big(f(\delta_i)-f(\delta_{i-1})\big) = g(a)\big(f(b)-f(a)\big) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i \big(f(\delta_i)-f(\delta_{i-1})\big)\big(g(\delta_j)-g(\delta_{j-1})\big)$$

$$g(\delta_i) = \sum_{j=1}^i \big(g(\delta_j)-g(\delta_{j-1})\big) + g(a)$$

$$= g(a)f(b) - g(a)f(a) + \sum_{j=1}^N \big(g(\delta_j)-g(\delta_{j-1})\big)\underbrace{\sum_{i=j}^N \big(f(\delta_i)-f(\delta_{i-1})\big)}_{f(b)-f(\delta_{j-1})}$$

$$= \cancel{g(a)f(b)} - g(a)f(a) - \underbrace{\sum_{j=1}^N \big(g(\delta_j)-g(\delta_{j-1})\big) f(\delta_{j-1})}_{\text{converge a } \int_a^b f(t)dg(t) \text{ per } |\delta|\to 0} + f(b)g(b) - \cancel{f(b)g(a)}$$

★ Quindi si può definire alla Stieltjes anche $\int_a^b g(t)\,df(t)$ e vale:

$$\int_a^b f(t)\,dg(t) + \int_a^b g(t)\,df(t) = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

- Esempio di integrale stocastico che non necessita definizioni nuove

$$\int_0^t s\,dB_s = tB_t - 0 - \int_0^t B_s\,ds$$

NON FUNZIONA CON $\displaystyle\int_0^t B_s\,dB_s = ?$

TRASFORMAZIONI PIÙ COMUNI DI BM

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad B_t$ un BM, $\quad t_0 \geq 0$

a) $X_t := -B_t$

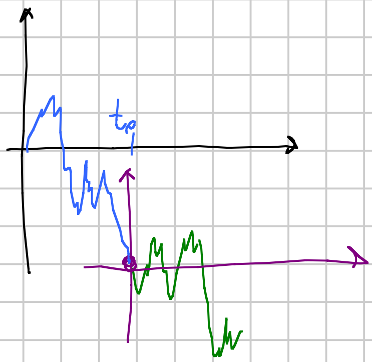
b) $Y_t := B_{t+t_0} - B_{t_0}$

c) $Z_t := \frac{1}{a} B_{a^2 t}$

d) $W_t := \begin{cases} t\, B_{1/t} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$

sono moti browniani

lega proprietà locali con proprietà asintotiche



LGN $\quad \frac{S_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{q.c.} 0$ $\quad$ continuità

LL Iterato $\quad$ non derivabilità

<u>Dim</u> (che sono proprio BM)

- valore in zero ✓
- gaussianità ✓ $\quad a \in \mathbb{R}^n \quad t \in \mathbb{R}_+^n \quad \sum_{i=1}^n a_i B_{t_i} \sim \mathcal{N}$

scrivo per W $\quad \sum_i a_i W_{t_i} = \sum_1 \underbrace{a_i t_i}_{a_i'} B_{\underset{t_i'}{1/t_i}} \sim \mathcal{N}$

- media zero ✓
- covarianza ✓ $\quad Cov(B_s ; B_t) = \min(s,t)$

$s < t$ $\quad Cov(X_s ; X_t) = Cov(-B_s ; -B_t) = Cov(B_s ; B_t) = s$

$Cov(Y_s ; Y_t) = Cov(B_{s+t_0} - B_{t_0} ; B_{t+t_0} - B_{t_0})$

$= \underbrace{Cov(B_{s+t_0} ; B_{t+t_0})}_{s+t_0} - \underbrace{Cov(B_{t_0} ; B_{t+t_0})}_{t_0} - \underbrace{Cov(B_{s+t_0} ; B_{t_0})}_{t_0} + \underbrace{Cov(B_{t_0} ; B_{t_0})}_{t_0}$

$= s$

HW: verificare c) e d)

- continuità delle traiettorie : ovvie tutte tranne la continuità in 0 di W_t

Dim che $W_t := t B_{1/t} \xrightarrow[t \to 0]{q.c.} 0$

i. Posso dire che W_t è un BM su $(0,\infty)$

$$P\left(\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{Q}}} W_t = 0\right) = P\left(\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{Q}}} B_t = 0\right) = P(\Omega) = 1$$

ii. Se per $\omega \in \Omega$ $\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{Q}}} W_t = 0$ allora anche $\lim_{t\to 0} W_t = 0$

(check)

NB. $\left\{\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{Q}}} W_t = 0\right\}$ è un evento che sta nella σ-alg prodotto (dipende da una quantità numerabile di coord.)

NB. Alla fine ho che q.c. W_t continua, perciò esiste un processo indistinguibile da W_t che è un BM.

- Ancora su $\int_0^t B_s \, dB_s$

se B_s fosse BV $\quad \int_0^t B_s dB_s + \int_0^t B_s dB_s \overset{\text{NO}}{=} B_t^2 \qquad \int_0^t B_s dB_s \overset{\text{NO}}{=} \frac{1}{2} B_t^2$

COSÌ NON È!

non è lo stesso con δ_i

$$\int_0^t B_s \, dB_s \overset{?}{=} ? \lim_{|\delta|\to 0} \sum_{i=1}^N B_{\delta_{i-1}} (B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})$$

$$\sum_{i=1}^N B_{\delta_{i-1}} (B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) = \sum_{i=1}^N (B_{\delta_{i-1}} B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}^2) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N (B_{\delta_i}^2 - B_{\delta_{i-1}}^2) - \frac{1}{2}\sum (B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2$$

$$= \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} T_B(\delta) \xrightarrow[|\delta|\to 0]{P} \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t$$

termine aggiuntivo

---

ora 15

1) $\int_0^t B_s dB_s := P\text{-}\lim_{|\delta|\to 0} \sum_{i=1}^N B_{\delta_{i-1}} (B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t$ $\quad$ integrale di Itô

$$B_t dB_t = \frac{1}{2} dB_t^2 - \frac{1}{2} dt$$

$$dB_t^2 = 2 B_t dB_t + dt \qquad \text{notazione differenziale}$$

$$\int_a^b dF_t = F_b - F_a \qquad\qquad B_t^2 - B_0^2 = 2\int_0^t B_s\,dB_s + t$$

WHITE NOISE

$$\cancel{\frac{d}{dt} B_t^2 = 2B_t \frac{dB_t}{dt} + 1}$$

★ Le regole di derivazione sono diverse:

$$df(B_t) = f'(B_t)\,dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t)\,dt \qquad \text{Formula di Itô}$$

$$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x \qquad f''(x) = 2$$

$$dB_t^2 = 2B_t\,dB_t + dt$$

Altre possibili definizioni

2) $$\int_0^t B_s \circ dB_s := P-\lim_{|\delta|\to 0} \sum_{i=1}^N \frac{B_{\delta_i} + B_{\delta_{i-1}}}{2}\left(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}\right) = \frac{1}{2} B_t^2$$ integrale di Stratonovich

3) $$P-\lim_{|\delta|\to 0} \sum B_{\delta_i}\left(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}\right) = \frac{1}{2} B_t^2 + \frac{1}{2} t$$ (check)

★ La cosa più importante, nel definire $\int_a^b X_s\,dB_s = P-\lim_{|\delta|\to 0} \sum_1^N X_{\delta_{i-1}}\left(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}\right)$

sarà l'indipendenza fra $X_{\delta_{i-1}}$ e $B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}$ in ogni addendo

Questo richiede di introdurre due concetti nuovi

FILTRAZIONI E PROCESSI ADATTATI

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

- **Def** $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ è una filtrazione se $\mathcal{F}_t$ σ-algebra $\forall t$
  e se $s < t$ $\quad \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$

- **Def** La filtrazione naturale di un processo X_t è quella definita da:

$$\mathcal{F}_t := \sigma\left((X_s)_{s\leq t}\right)$$

• **Def** Il processo X_t è adattato alla filtrazione $\mathcal{F}_t$ se $\forall t$

$$X_t \text{ è } \mathcal{F}_t\text{-misurabile}$$

$\star$ Ovviamente ogni processo è adattato alla propria filtrazione naturale e a tutte (e sole) quelle che la contengono

X è adattato rispetto a $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ se $\forall t \geq 0$ $\mathcal{G}_t \supseteq \mathcal{F}_t$
dove $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ è la filtr. naturale di X

• Osservazioni: (supponiamo X_t adattato rispetto ad $\mathcal{F}$)

$\{X_t \geq 0\} \in \mathcal{F}_t$

$\left\{\int_a^b X_s\, ds \in A\right\} \in \mathcal{F}_b$ suppongo anche X con traiettorie continue

$\left\{\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{Q}}} X_t = 0\right\} \in \mathcal{F}_\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ quindi $\{\dots\} \in \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{F}_{\frac{1}{n}} =: \mathcal{F}_{0+} \supseteq \mathcal{F}_0$

$\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n}\right\} \in \sigma\left(\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n\right) = \text{"}\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n\text{"} =: \mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{F}$

• Se B_t è BM e $\mathcal{F}_t$ è la sua filtr. naturale
allora $\forall s<t$ $B_t - B_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$

X indip da $\mathcal{F}$ $\iff$ $\sigma(X)$ indip da $\mathcal{F}$
$\iff$ $\forall A \in \sigma(X), B \in \mathcal{F}$ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
$\iff$ $\forall \tilde{A} \in \mathcal{B}, B \in \mathcal{F}$ $P(\{X \in \tilde{A}\} \cap B) = P(X \in \tilde{A})P(B)$
ma $\mathcal{F} = \mathcal{F}_s = \sigma((Y_u)_{u\leq s})$ $B \in \mathcal{F} \iff B = \{(Y_{u_n})_{n\geq 1} \in \tilde{B}\}$
$Y_t - Y_s$ indip da $\mathcal{F}_s$ $\iff$ $\forall \tilde{A} \in \mathcal{B}, \tilde{B} \in \mathcal{B}^{\otimes \mathbb{N}}$

$$P(X \in \tilde{A}, (Y_{u_n})_n \in \tilde{B}) \overset{!}{=} P(Y_t - Y_s \in \tilde{A})\, P((Y_{u_n})_n \in \tilde{B})$$

indip da Y_u con $u \leq s$ $\qquad$ $u_n \leq s$

◎ Def $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$

$B = (B_t)_{t \geq 0}$ è un BM rispetto a $\mathcal{F}$ se : è adatto ad $\mathcal{F}$, ha traiettorie continue , $B_0 = 0$, $\forall s<t$ $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ ed è indipendente da $\mathcal{F}_s$

⚠ Qui non chiedo che $\mathcal{F}$ sia la filtrazione naturale di B. Può essere più grande . Non troppo però, per non perdere l'indipendenza degli incrementi .

Next time : ripasso sulla speranza condizionale

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $X \in L^1$ $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ $E(X | \mathcal{G}) := ?$

ANALISI STOCASTICA ora 16

Note Title 28/11/2012

SPERANZA CONDIZIONALE (WILLIAMS CAP. 9)

$E[X|\mathcal{G}]$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $X \in L^1$; sotto σ-algebra di $\mathcal{F}$

v.a. su $(\Omega, \mathcal{G}, P)$, anche su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ovviamente

→ $E|X| < \infty$ ipotesi fondamentale

☆ $E[X|V] := E[X|\sigma(V)]$ notazione

v.a. su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

- Casi semplici ed esempio

→ se V è discreta $E[X|V]$ è un concetto molto semplice e intuitivo:

$\sum_{k\in\mathbb{N}} P(V = x_k) = 1$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $P(V=x) > 0$ $E(X|V=x) =: \varphi(x)$
allora $E[X|V] = \varphi(V)$

→ esempio: X, Y due dadi, indipendenti $S = X+Y$

$E(S|X) = ?$

$\varphi(k) = E(S|X=k) = E(X+Y|X=k) = E(Y+k|X=k) = E(Y|X=k)+k$

$= E(Y)+k = \frac{7}{2}+k$

linearità di E^Q
dove Q è la prob. $P(\cdot|X=k)$

$E(S|X) = \frac{7}{2} + X$

HW: $E(X|S) = ?$

Def: $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-alg. allora diciamo che Y è una versione della speranza condizionale di X dato $\mathcal{G}$ ($Y = E[X|\mathcal{G}]$ q.c.) se

i. $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$

ii. $\forall G \in \mathcal{G}$ $\quad E(Y; G) = E(X; G)$

N.B. $E(X; G) := \int_G X \, dP = E(X \mathbb{1}_G)$

* da non confondere con $E(X|G) = \dfrac{E(X;G)}{P(G)} = E^Q(X)$ dove $Q(A) := P(A|G)$ $\quad P(G) > 0$

* essendo definite a meno di versioni, $E(X|\mathcal{G})$ è una classe di equivalenza

ESISTENZA E UNICITÀ

- Unicità (a meno di versioni)

Dim $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\mathcal{G}$ sotto σ-alg di $\mathcal{F}$, Y_1 e Y_2 due versioni di $E(X|\mathcal{G})$ (ovvero soddisfano i. e ii.)

$$0 = E(X; G) - E(X; G) = E\Big(Y_1 - Y_2 ; \underbrace{\{Y_1 - Y_2 > \tfrac{1}{n}\}}_{= G \in \mathcal{G}}\Big) = \int_G (Y_1 - Y_2) \, dP \geq \frac{1}{n} P(G)$$

$P\left(Y_1 - Y_2 > \frac{1}{n}\right) = 0 \quad \forall n \quad \Rightarrow P(Y_1 > Y_2) = 0$ $\quad$ viceversa analogo

$\Rightarrow P(Y_1 = Y_2) = 1$ $\quad$ ovvero $\quad Y_1 = Y_2$ q.c.

- Esistenza (con Radon-Nikodym)

Def $(\Omega, \mathcal{F})$ $\quad \mu, \nu$ due misure di probabilità

$\mu \ll \nu$ $\quad$ μ è assolutamente continua rispetto a ν

se $\forall A \in \mathcal{F}$ $\quad \nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$

Thm: $(\Omega, \mathcal{F})$ $\mu \ll \nu$ allora $\exists f$ $\mathcal{F}$-misurabile, $f \geq 0$, $\int_\Omega f \, d\nu = 1$

t.c. $\forall A \in \mathcal{F}$ si ha: $\mu(A) = \int_A f \, d\nu$

$f = \frac{d\mu}{d\nu}$ (notazione)

Dim esistenza (wlog $X \geq 0$ q.c.)

$(\Omega, \mathcal{G})$ μ, P due misure di prob.

$$\mu(G) := \frac{E(X;G)}{E(X)}$$

(check che μ soddisfi i tre assiomi)

se $P(G) = 0$, allora $\int_G X \, dP = 0 \Rightarrow \mu(G) = 0$

allora $\mu \ll P$. Applico R-N: $\exists f \geq 0$, $\mathcal{G}$-mis con $\int_\Omega f \, dP = 1$

t.c. $\forall G \in \mathcal{G}$ $\mu(G) = \int_G f \, dP$

Claim: $fE(X)$ è una versione di $E(X|\mathcal{G})$, infatti

i. $fE(X)$ è $\mathcal{G}$-mis. $E(|fE(X)|) = 1 \cdot E(X) < \infty$

ii. $\forall G \in \mathcal{G}$ $E(fE(X); G) = \int_G f \, dP \, E(X) = \mu(G) E(X) := E(X; G)$

$\boxed{\text{ora } 17}$

ESISTENZA (SENZA RADON-NICODYM)

Step 1) Caso $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di Hilbert

$U, V \in L^2$ $\langle U, V \rangle := \int_\Omega UV \, dP = E(UV)$

$\langle X, X \rangle := E(X^2) =: \|X\|_{L^2}^2$

rispetto alla topologia indotta dalla norma

$L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ sottospazio vettoriale chiuso di $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

basta la completezza per vederlo

Claim: la proiezione ortogonale di X sul sottospazio è la speranza condizionale

Dim claim Sia $h := \inf\{\|Z - X\| : Z \in L^2(\mathcal{G})\} \geq 0$

esiste successione $(Y_n)_{n\geq 1}$ $Y_n \in L^2(\mathcal{G})$ t.c. $\|Y_n - X\| \to h$

$$\|Y_m - Y_n\|^2 = \|(Y_m - X) - (Y_n - X)\|^2 \overset{\uparrow}{=} 2\underbrace{\|Y_m - X\|^2}_{\leq h^2+\varepsilon} + 2\underbrace{\|Y_n - X\|^2}_{\leq h^2+\varepsilon} - \underbrace{\|Y_m + Y_n - 2X\|^2}_{\geq 4h^2} \leq 4\varepsilon$$

regola del parallelogramma

$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

perché $\frac{Y_m + Y_n}{2} \in L^2(\mathcal{G})$

(Y_n) è di Cauchy, quindi $Y_n \xrightarrow{L^2} Y \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$

vale inoltre $\|Y - X\| = h$ (check)

i. $Y \in L^1(\mathcal{G})$ ovvio, anzi sta in $L^2(\mathcal{G})$

ii. $E(Y; G) \overset{?}{=} E(X; G)$

$$E(X; G) = E(X \mathbb{1}_G) = \langle X; \mathbb{1}_G \rangle$$

voglio dimostrare che $\langle X - Y; \mathbb{1}_G \rangle = 0$

$$h^2 \leq \|\underbrace{X - Y + t\mathbb{1}_G}_{\in L^2(\mathcal{G})}\|^2 = \underbrace{\|X - Y\|^2}_{= h^2} + \underbrace{t^2 P(G)^2 + 2t\langle X - Y; \mathbb{1}_G \rangle}_{\text{polinomio in } t \text{ che deve essere } \geq 0 \ \forall t}$$

allora $\langle X - Y; \mathbb{1}_G \rangle = 0$

Step 2) Linearità e monotonia

★ $Y_i = E(X_i | \mathcal{G})$ q.c. $i = 1,2$ allora $aY_1 + bY_2 = E(aX_1 + bX_2 | \mathcal{G})$ q.c.

i. $aY_1 + bY_2 \in L^1(\mathcal{G})$ perché è uno spazio vettoriale

ii. $\forall G \in \mathcal{G}$ $E(aY_1 + bY_2; G) = \int_G (aY_1 + bY_2)\,dP = a\int_G Y_1\,dP + b\int_G Y_2\,dP$

$$= a\int_G X_1\,dP + b\int_G X_2\,dP = \ldots = E(aX_1 + bX_2; G)$$

★ $X \geq 0$ q.c. e $Y = E(X | \mathcal{G})$ q.c. allora $Y \geq 0$ q.c. (HW)

Step 3) Caso $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (wlog $X \geq 0$, per linearità)

Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ successione in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ t.c. $X_n \uparrow X$

Sia $Y_n = E(X_n | \mathcal{G})$ q.c. $\forall n \geq 1$

$Y_n - Y_{n-1} = E(X_n - X_{n-1} | \mathcal{G}) \geq 0$ $\forall n$ q.c. (per lo step 2)

$Y_n \uparrow Y := \sup_n Y_n$ convergenza q.c. e L^1 (thm di converg. monotona)

$\forall G \in \mathcal{G} \quad E(Y_n; G) = E(X_n; G) = \int_G X_n \, dP \uparrow \int_G X \, dP = E(X; G)$

i. $Y \in L^1(\mathcal{G})$

Per $G = \Omega$ ho $E(Y_n) \uparrow E(X) < \infty$, quindi $Y \in L^1$, quindi $Y < \infty$ q.c.

Vale anche $E(Y_n; G) \uparrow E(Y; G)$ e quindi

ii. $E(X; G) = E(Y; G)$ $\square$

- Esempi :

1) $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\quad Y := \operatorname{sign} X := \begin{cases} -1 & X < 0 \\ 0 & X = 0 \\ +1 & X > 0 \end{cases}$

$$E(X \mid Y) := \underbrace{E(X \mid \sigma(Y))}_{\sigma(Y)\text{-misurabile}} = \varphi(Y) = \begin{cases} \varphi(-1) & X < 0 \\ \text{whatever} & X = 0 \\ \varphi(1) & X > 0 \end{cases}$$

Lemma di Doob (ora 2)

$$E(X; \underbrace{Y=1}_{G}) = E(X; X>0) = \int_{X>0} X \, dP = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-x^2/2} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = E(Y; Y=1)$$

$$= E(\varphi(1); Y=1) = \varphi(1) P(Y=1) = \frac{1}{2} \varphi(1) \qquad \varphi(1) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \quad \varphi(-1) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

$$E(X \mid Y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} Y = Y \, E|X|$$

HW: $E(X \mid |X|) = ?$

ANALISI STOCASTICA ore 18 e 19

Note Title 17/12/2012

DI QUESTE DUE ORE NON ESISTE AUDIO. QUELLA CHE SEGUE È LA TRASCRIZIONE DELLE LAVAGNATE

- Esempi

basta scambiabili

2) $X_1, X_2, \dots, X_n$ i.i.d. e L^1

$S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n \qquad E(X_i \mid S_n) = ? =: \varphi_i(S_n)$

claim : $\varphi_i(S_n) = \varphi_j(S_n)$ q.c. $\forall i,j$

dando per buono il claim :

$$n\varphi_1(S_n) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(S_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i \mid S_n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i \mid S_n\right) = E(S_n \mid S_n) = S_n \text{ q.c.}$$

$$\boxed{E(X_1 \mid S_n) = \frac{S_n}{n} \text{ q.c.}}$$

Dim claim : RPA (wlog) $\exists A \in \mathcal{B} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \exists i < j$:

$P(S_n \in A) > 0$ e $\varphi_i \geq \varphi_j + \varepsilon$ su tutto $\{\omega \in \Omega : S_n(\omega) \in A\} =: \{S_n \in A\}$

quindi $E(X_i \mid S_n) \geq E(X_j \mid S_n) + \varepsilon$ su $\{S_n \in A\}$

$$\int_{S_n \in A} X_i \, dP = \int_{S_n \in A} E(X_i \mid S_n)\, dP \geq \varepsilon P(S_n \in A) + \int_{S_n \in A} E(X_j \mid S_n)\, dP > \int_{S_n \in A} X_j \, dP$$

ma vale anche

$$\int_{S_n \in A} X_i \, dP = E(X_i \, ; \, S_n \in A) = \iint_{x_1 + \dots + x_n \in A} \cdots \int x_i \, d\Lambda_{X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$$

$$= \iint_{x_1 + \dots + x_n \in A} \cdots \int x_i \, d\Lambda_{X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = E(X_j \, ; \, S_n \in A)$$

perché $X_1, \dots, X_n$ scambiabili

- PROPRIETÀ SPERANZA CONDIZIONALE

(estratto della lista del Williams) $\qquad X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}) \quad \mathcal{G}$ sotto σ-alg di $\mathcal{F}$

a) $E(E(X \mid \mathcal{G})) = E(X)$

$\forall G \in \mathcal{G} \quad E(X \, ; \, G) = E(E(X \mid \mathcal{G}) \, ; \, G)$ basta prendere $G = \Omega$

b) Se X è $\mathcal{G}$ - misurabile $\quad E(X|\mathcal{G}) = X$ q.c.

per definizione

c) linearità
d) positività
$\Big\}$ già fatti

j) Se Z è $\mathcal{G}$-misurabile e $ZX \in L^1$ $\quad E(ZX|\mathcal{G}) = Z \underbrace{E(X|\mathcal{G})}_{Y}$ q.c.

Dim $\quad E(ZX|\mathcal{G}) \overset{?}{=} ZY \qquad$ i. ZY è $\mathcal{G}$-misurabile

che sia L^1 seguirà da ii.

ii. $\forall G \in \mathcal{G}$, $E(ZX; G) \overset{?}{=} E(ZY; G)$

$$E(\underbrace{\mathbb{1}_G Z}_{\mathcal{G}\text{-mis.}} X) \overset{?}{=} E(\underbrace{\mathbb{1}_G Z}_{\mathcal{G}\text{-mis.}} Y)$$

Per verificare quest'ultima uguaglianza dimostro che:

j*) Se $Y = E(X|\mathcal{G})$ q.c. e V è una v.a. $\mathcal{G}$-misurabile allora

$E(XV) = E(YV)$ $\quad$ manca ipotesi che $XV \in L^1$ oppure $YV \in L^1$

Dim uso la "standard machine" $\quad$ vedi sia 28

1) se $V = \mathbb{1}_G$ con $G \in \mathcal{G}$ è vero per definizione
2) se $V = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{G_i}$ è vero per linearità
3) Se $V \geq 0$ $\exists (V_n)_{n\geq 1}$ di funzioni semplici con $V_n \uparrow V$ q.c.
allora $X^{\pm} V_n \uparrow X^{\pm} V$ q.c. e in L^1 e $XV_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} XV$
stessa cosa vale per $YV_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} YV$ quindi $E(XV) = E(YV)$
4) Per V generica vale per linearità $V = V^+ - V^-$

k) Se X e $\mathcal{G}$ sono indipendenti, allora $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$

(HW) Trovare esempio in cui non è vero che $E(X|\mathcal{G})$ sia $\sigma(X)$ - misurabile

Dim: i. $\sigma(E(X)) = \{\Omega, \emptyset\} \subseteq \mathcal{G}$

ii. $\forall G \in \mathcal{G} \quad E(X; G) \overset{?}{=} E(E(X); G) = E(X)P(G)$

$$E(X; G) = E(X \mathbb{1}_G) = E(X)E(\mathbb{1}_G) = E(X)P(G) \quad \text{okay}$$

indip.

si dimostra con la standard machine

- Provo a definire $\displaystyle\int_a^b X_s \, dB_s = P\text{-}\lim_{|\delta| \to 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{N^\delta} X_{\delta_{i-1}}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})}_{I_\delta}$

qui X_t adattato rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ e B_t moto Browniano rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

(*) $$E(I_\delta) = \sum_{i=1}^N E(X_{\delta_{i-1}}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})) \overset{a)}{=} \sum_{i=1}^N E[E(X_{\delta_{i-1}}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) | \mathcal{F}_{\delta_{i-1}})]$$

$$\overset{j)}{=} \sum_{i=1}^N E[X_{\delta_{i-1}} E(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}} | \mathcal{F}_{\delta_{i-1}})] \overset{k)}{=} \sum_{i=1}^N E[X_{\delta_{i-1}} \underbrace{E(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})}_{0}] = 0$$

indip.

(**) $$\mathrm{Var}(I_\delta) = E(I_\delta^2) = \sum_{i,j=1}^N E[E(X_{\delta_{i-1}} X_{\delta_{j-1}}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})(B_{\delta_j} - B_{\delta_{j-1}}) | \mathcal{F}_{\delta_{i \vee j - 1}})]$$

NB se $i < j$ porto fuori $X_{\delta_{i-1}} X_{\delta_{j-1}}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) E(B_{\delta_j} - B_{\delta_{j-1}} | \mathcal{F}_{\delta_{j-1}}) = 0$

uguale se $i > j$. Quindi:

indip.

$$\mathrm{Var}(I_\delta) = \sum_{i=1}^N E[X_{\delta_{i-1}}^2 \underbrace{E((B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2 | \mathcal{F}_{\delta_{i-1}})}_{\delta_i - \delta_{i-1}}] = \sum_{i=1}^N E(X_{\delta_{i-1}}^2)(\delta_i - \delta_{i-1})$$

$$\mathrm{Var}(I_\delta) \xrightarrow[|\delta| \to 0]{} \int_a^b E(X_s^2) \, ds$$

isometria di Itô

$$E\left[\int_a^b X_s \, dB_s\right] = 0 \qquad E\left[\left(\int_a^b X_s \, dB_s\right)^2\right] = E\int_a^b X_s^2 \, ds$$

Q: $(I_\delta)_\delta$ è una successione di Cauchy in L^2?

wlog $\delta^1 \geq \delta^2$

$$E[(I_{\delta^1} - I_{\delta^2})^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^N (X_{\delta^1_{i-1}} - X_{(\delta^2_i)})(B_{\delta^1_i} - B_{\delta^1_{i-1}})\right)^2\right] = \sum_{i,j} \cdots = (\text{soliti passaggi})$$

$$= \sum_{i=1}^{N} E\left[\left(X_{\delta^1_{i-1}} - X_{(\delta^1_i)}\right)^2\right](\delta_i - \delta_{i-1}) \overset{?}{\leq} \varepsilon$$

Non si chiude: servirebbero ipotesi di regolarità su X, tipo continuità uniforme. La prossima ora ricominceremo con un approccio più robusto e riusciremo a chiudere.

■ PROCESSI CHE SI INTEGRANO

La più importante classe di processi X per cui si può definire l'integrale stocastico $\int_a^b X_s \, dB_s$ è quella dei processi L^2 progressivamente misurabili

- **Def** Su $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ il processo X si dice **progressivamente misurabile** se

$$\forall t \geq 0 \quad X\big|_{\Omega \times [0,t]} \text{ è } \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}[0,t]\text{-misurabile}$$

$\star$ Ricordiamo che invece X è adattato se

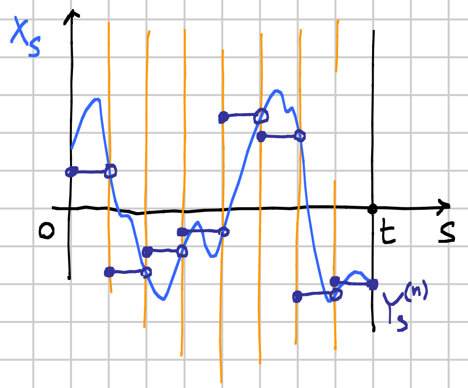
$$\forall t \geq 0 \quad X_t \text{ è } \mathcal{F}_t\text{-misurabile}$$

$\to$ Chiaramente progr. mis. $\Rightarrow$ adattato (check)

$\star$ La def di progr. mis. è difficile da verificare. Per fortuna vale:

- **Prop**: adattato + continuo a destra $\Rightarrow$ progressivamente misurabile

Dim fisso $t > 0$ (per $t = 0$ è ovvio)



$n \geq 1$ definisco i processi $Y^{(n)}$

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{2^n} = t \qquad t_k = \frac{k}{2^n} t$

$$Y_s^{(n)} = \begin{cases} X_{t_{k+1}} & s \in [t_k, t_{k+1}) \\ X_t & s = t \end{cases}$$

1) $\forall \omega$ per cui X è continuo a DX e $\forall s \in [0,t]$, $Y_s^{(n)}(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X_s(\omega)$ (check)

2) $Y^{(n)}$ è $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}[0,t]$ - misurabile

sia $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$(Y^{(n)})^{-1}(A) = \left\{ (\omega, s) \in \Omega \times [0,t] : Y_s^{(n)}(\omega) \in A \right\}$$

$$= \left\{ (\omega,s) : \exists k = 0,1,\dots,2^n : s \in [t_k, t_{k+1}),\ X_{t_{k+1}}(\omega) \in A \text{ oppure } s = t \ X_t \in A \right\}$$

$$= \bigcup_{k=0}^{2^n} \Big(\underbrace{\{X_{t_{k+1}} \in A\}}_{\mathcal{F}_t} \times \underbrace{[t_k, t_{k+1})}_{\mathcal{B}} \Big) \cup \underbrace{\{X_t \in A\}}_{\mathcal{F}_t} \times \underbrace{\{t\}}_{\mathcal{B}} \quad \in \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}[0,t]$$

3) $Y^{(n)}$ $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}[0,t]$ - misurabile e $Y^{(n)} \longrightarrow X$ quasi ovunque in $\Omega \times [0,t]$

$\Rightarrow X\big|_{\Omega \times [0,t]}$ è $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}[0,t]$ - misurabile.

ANALISI STOCASTICA

ora 20

Note Title 18/12/2012

INTEGRALE STOCASTICO

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ $\quad (B_t)_{t\geq 0}$ BM rispetto a $\mathcal{F}_t$ $\quad 0\leq a<b$ fissati

$$I(X) := \int_a^b X_s \, dB_s \qquad I : X \longmapsto \int_a^b X_s \, dB_s$$

processo $\quad$ v.a.

$$L^2 = L^2(\Omega) = L^2((\Omega, \mathcal{F}, P); (\mathbb{R}, \mathcal{B}))$$

$$M^2_{a,b} := L^2((\Omega\times[a,b], \mathcal{F}\otimes\mathcal{B}, P\times\mathcal{L}); (\mathbb{R},\mathcal{B})) \cap \{\text{progr. misurabili}\}$$

$$I : M^2_{a,b} \longrightarrow L^2$$

☆ X è progr. misurabile se $\forall t\geq 0$ $\quad X\big|_{\Omega\times[0,t]}$ è $\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}$-misurabile

è più forte che adattato.

Tuttavia adattato + continuo a destra $\Rightarrow$ progr. mis.

HW : $M^2_{a,b} = L^2((\Omega\times[a,b], \mathcal{G}, P\times\mathcal{L}))$ per $\mathcal{G}$ opportuna

* in particolare $M^2_{a,b}$ è completo rispetto $\| \ \|_{L^2}$ e ss.v. chiuso di L^2.

☆ Norma di $M^2_{a,b}$: $\quad \|X\|_2^2 := E\int_a^b X_t^2 \, dt$

Processi semplici

- **Def** $X\in M^2_{a,b}$ si dice semplice se esistono

$\delta\in\Delta_{a,b}$ $\quad (C_i)_{i=0,1,2,\dots,N^\delta-1}$ t.c. $C_i\in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{\delta_i})$ t.c.

$$X = \sum_{i=1}^{N} C_{i-1} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)} \qquad \text{si scrive } X\in S^2_{a,b}$$

☆ I tempi di salto sono deterministici, mentre i C_i sono casuali

- Oss : $\quad S^2_{a,b} \subseteq M^2_{a,b}$

i. $X \in S^2_{a,b}$ è adattato : $X_t = C_{i-1}$ per $t \in [\delta_{i-1}, \delta_i)$

C_{i-1} è $\mathcal{F}_{\delta_{i-1}} \subseteq \mathcal{F}_t$ - misurabile.

X è cont. a destra per costruzione $\Rightarrow$ X è progr. mis.

ii. $$\|X\|_2^2 = \left\| \sum_{i=1}^N C_{i-1} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1}, \delta_i)} \right\|_2^2 = E\int_a^b \left(\sum_{i=1}^N C_{i-1} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1}, \delta_i)}(t) \right)^2 dt$$

$$= \sum_{i,j} E \int_a^b C_{i-1} C_{j-1} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1};\delta_i)}(t) \mathbb{1}_{[\delta_{j-1};\delta_j)}(t)\, dt$$

$$= \sum_{i=1}^N E \int_a^b C_{i-1}^2 \mathbb{1}_{[\delta_{i-1};\delta_i)}(t)\, dt = \sum_{i=1}^N \underbrace{E(C_{i-1}^2)}_{\|C_{i-1}\|^2 < \infty}(\delta_i - \delta_{i-1}) < \infty$$

$$\boxed{\|X\|_2^2 = \sum_{i=1}^N E(C_{i-1}^2)(\delta_i - \delta_{i-1})}$$ (servirà più in basso)

- Definisco I su $S^2_{a,b}$

$X \in S^2_{a,b}$ $\quad X = \sum_{i=1}^N C_{i-1} \mathbb{1}_{[\delta_i;\delta_{i-1})}$ $\quad \sum C_{i-1} \int_a^b \mathbb{1}_{[\ )}(s)\, dB_s = \sum C_{i-1} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} dB_s$

$$\boxed{I(X) := \sum_{i=1}^N C_{i-1}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})}$$

(come visto e definito nei casi facili già trattati)

* Va verificata la buona definizione (check)
* Va verificata la linearità su $S^2_{a,b}$ (check)

- Isometria di Itô (per $S^2_{a,b}$)

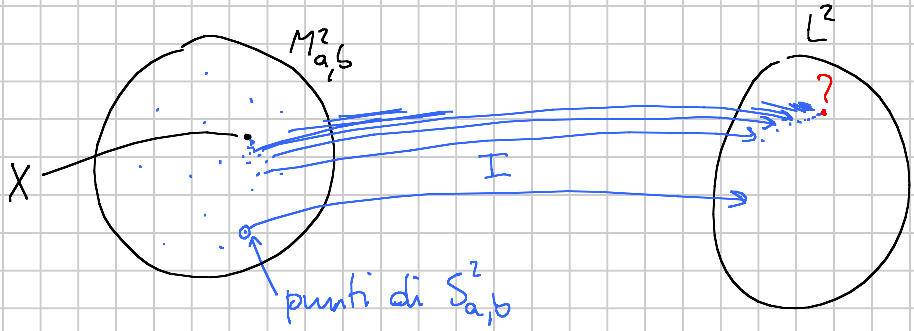
$X \in S^2_{a,b} \Rightarrow \|I(X)\| = \|X\|_2$

Dim $\quad X = \sum_{i=1}^N C_{i-1} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1};\delta_i)}$

$$\|I(X)\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^N C_{i-1}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) \right\|^2 = \sum_{i,j=1}^N E\left(C_{i-1} C_{j-1} (B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})(B_{\delta_j} - B_{\delta_{j-1}}) \right)$$

$$= (\text{passaggi ora 19}) = \sum_{i=1}^N E\left(C_{i-1}^2 (B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2 \right) = \sum_{i=1}^N E(C_{i-1}^2)(\delta_i - \delta_{i-1}) = \|X\|_2^2$$

$M^2_{a,b}$



$X \in M^2_{a,b}$ cerco $(X^{(n)})_{n\geq 1}$ $X^{(n)} \in S^2_{a,b}$ t.c. $X^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} X$

$I(X^{(n)}) \in L^2$ vedo se $I(X^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} Y \in L^2$ e def: $I(X) := Y$

★ Punto cruciale: $S^2_{a,b}$ è denso in $M^2_{a,b}$

Dando per buona ★:

1) $X \in M^2_{a,b}$ $\exists\ (X^{(n)})_{n\geq 1} \in S^2_{a,b}$ con $X^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} X$

2) $X^{(n)}$ è di Cauchy (ovvio, vero?)

3) $I(X^{(n)})$ è di Cauchy:

$$\|I(X^{(n)}) - I(X^{(m)})\| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{lineare}}}{=} \|I(X^{(n)} - X^{(m)})\| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{isometria di Itô}}}{=} \|X^{(n)} - X^{(m)}\|_2$$

---

ora 21

4) L^2 è completo quindi $I(X^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} Y =: I(X)$

5) Buona definizione.

Se prendo un'altra successione $S^2_{a,b} \ni \tilde{X}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} X$

e pongo $\tilde{Y} := L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} I(\tilde{X}^{(n)})$ allora

$$\|Y - \tilde{Y}\| \leq \|Y - I(X^{(n)})\| + \underbrace{\|I(\underset{\substack{\uparrow\\ S^2_{a,b}}}{X^{(n)}}) - I(\underset{\substack{\uparrow\\ S^2_{a,b}}}{\tilde{X}^{(n)}})\|}_{= \|I(X^{(n)} - \tilde{X}^{(n)})\| = \|X^{(n)} - \tilde{X}^{(n)}\|_2} + \|I(\tilde{X}^{(n)}) - \tilde{Y}\|$$

$$\leq \|Y - I(X^{(n)})\| + \|X^{(n)} - X\|_2 + \|X - \tilde{X}^{(n)}\|_2 + \|I(\tilde{X}^{(n)}) - \tilde{Y}\|$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow \|Y - \tilde{Y}\| \leq 4\varepsilon \quad \Rightarrow \|Y - \tilde{Y}\| = 0$

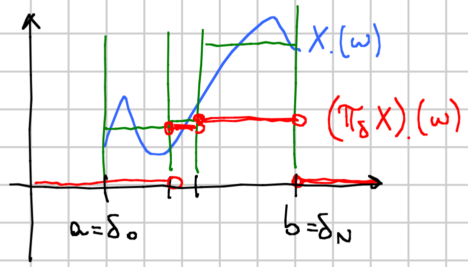
Densità di $S^2_{a,b}$ dentro $M^2_{a,b}$

$X \in M^2_{a,b}$ $\qquad \delta \in \Delta_{a,b}$

$$\pi_\delta : M^2_{a,b} \longrightarrow S^2_{a,b}$$
$$X \longmapsto \pi_\delta X$$

$$\boxed{\begin{aligned} \pi_\delta X &= \sum_{i=2}^{N} c^X_{i-1} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1};\delta_i)} \\ c_i^X &= \begin{cases} \dfrac{1}{\delta_i - \delta_{i-1}} \displaystyle\int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} X_t \, dt & X_\cdot(\omega) \in L^2([a,b]) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}}$$

★ $X \in M^2_{a,b}$ $\qquad E\displaystyle\int_a^b X_s^2 ds < \infty \Rightarrow \int_a^b X_s^2(\omega) ds < \infty$ q.o. $\omega \Rightarrow X_\cdot(\omega) \in L^2([a,b])$ q.c.



• $\pi_\delta X \overset{?}{\in} S^2_{a,b}$

verifico se $c_i^X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{\delta_i}, P)$

i. $\sigma(c_i^X) \subseteq \mathcal{F}_{\delta_i}$ per definizione

ii. $$\|c_i^X\|^2 = \left\| \frac{1}{\delta_i - \delta_{i-1}} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} X_s ds \right\|^2 = E\left[\underbrace{\left(\frac{1}{\delta_i - \delta_{i-1}} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} X_s ds \right)^2}_{\left(\mathbb{E}^{P_i}(X_\cdot(\omega))\right)^2} \right]$$

$$\leq E\left[\mathbb{E}^{P_i}\left(X^2_\cdot(\omega)\right)\right] = E\left[\frac{1}{\delta_i - \delta_{i-1}} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} X_s^2 ds\right] = \frac{1}{\delta_i - \delta_{i-1}} \underbrace{\int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} E(X_s^2) ds}_{<\infty} < \infty$$

- Devo far vedere che $\pi_\delta X \xrightarrow[|\delta|\to 0]{L^2} X$

Fisso $\omega \in \Omega$: $X_\cdot(\omega) \in L^2(a,b)$

a) Se $X_\cdot(\omega)$ è continua

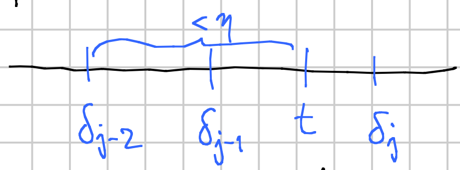
Fisso $t \in [a,b]$

$$(\pi_\delta X)_t(\omega) \xrightarrow[|\delta|\to 0]{?} X_t(\omega) \qquad \text{sia } j : t \in [\delta_{j-1}; \delta_j)$$

$$(\pi_\delta X)_t(\omega) = C^X_{j-1}(\omega) = \frac{1}{\delta_{j-1}-\delta_{j-2}} \int_{\delta_{j-2}}^{\delta_{j-1}} X_s(\omega)\,ds$$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 : |t-s| < \eta \Rightarrow |X_s(\omega) - X_t(\omega)| < \varepsilon$

$\exists \delta \in \Delta_{a,b} : |\delta| < \frac{\eta}{2}$



$\Rightarrow |X_s(\omega) - X_t(\omega)| < \varepsilon \quad \forall s \in [\delta_{j-2}; \delta_{j-1}] \Rightarrow |C^X_{j-1}(\omega) - X_t(\omega)| < \varepsilon$

ho dimostrato che $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta : |(\pi_\delta X)_t(\omega) - X_t(\omega)| < \varepsilon$

ovvero $(\pi_\delta X)_\cdot(\omega) \xrightarrow[|\delta|\to 0]{} X_\cdot(\omega)$ puntualmente su $[a,b]$

mi serve la convergenza dominata

$$|(\pi_\delta X)_\cdot(\omega)| \leq \max_i |C^X_{i-1}(\omega)| \leq \max_{[a,b]} X_\cdot(\omega) \leq C < \infty$$

continua

$C \in L^2(a,b) \Rightarrow$

$$(\pi_\delta X)_\cdot(\omega) \xrightarrow[|\delta|\to 0]{L^2(a,b)} X_\cdot(\omega)$$

b) $X_\cdot(\omega)$ qualsiasi

Siccome le funzioni $C^0[a,b]$ sono dense in $L^2(a,b)$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists f$ continua t.c.

$$\|X_\cdot(\omega) - f\|^2_{L^2(a,b)} := \int_a^b (X_s(\omega) - f(s))^2\,ds < \varepsilon$$

$\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_{L^2(a,b)}$

$$\|(\pi_\delta X)_\cdot(\omega) - X_\cdot(\omega)\|_{L^2(a,b)} \leq \|(\pi_\delta X)_\cdot(\omega) - (\pi_\delta f)_\cdot\|_* + \|(\pi_\delta f)_\cdot - f\|_* + \|f - X_\cdot(\omega)\|_*$$

devo dimostrare che il primo addendo è piccolo

ANALISI STOCASTICA

ora 22

Note Title 19/12/2012

- Stavamo dimostrando che $\pi_\delta X \xrightarrow[|\delta|\to 0]{L^2} X$

$\delta \in \Delta_{a,b} \qquad \pi_\delta : M^2_{a,b} \to S^2_{a,b}$

$$\pi_\delta X := \sum_{i=2}^{N^\delta} C^X_{i-1} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)} \qquad C^X_i := \begin{cases} \dfrac{1}{\delta_i - \delta_{i-1}} \displaystyle\int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} X_s\, ds & X_\cdot(\omega) \in L^2(a,b) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$*$ In realtà $\pi_\delta : L^2(a,b) \longrightarrow L^2(a,b)$

in realtà va nel sottoinsieme delle costanti a tratti su δ

caso b) i. π_δ è lineare su $L^2(a,b)$ $\quad \forall f,g \in L^2(a,b)$

$$\pi_\delta(\alpha f + \beta g) = \sum C^{\alpha f+\beta g}_{i-1} \mathbb{1}_{[\ \ )} = \sum (\alpha C^f_{i-1} + \beta C^g_{i-1}) \mathbb{1}_{[\ \ )} = \alpha \pi_\delta f + \beta \pi_\delta g$$

$$C^{\alpha f+\beta g}_i = \frac{1}{\delta_i - \delta_{i-1}} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} (\alpha f(s) + \beta g(s))\, ds = \alpha C^f_i + \beta C^g_i$$

$\|\cdot\|_*$	norma di $L^2(a,b)$
$\|\cdot\|$	norma di $L^2(\Omega)$
$\|\cdot\|_2$	norma di $L^2(\Omega \times [a,b])$

ii. π_δ è un operatore lineare continuo

$$\|\pi_\delta f\|^2_* = \int_a^b \left[\sum_{i=2}^N C^f_{i-1} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)}(s)\right]^2 ds = \sum_{i=2}^N (C^f_{i-1})^2 \underbrace{\int_a^b \mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)}(s)\, ds}_{(\delta_i - \delta_{i-1})}$$

$$(C^f_{i-1})^2 = \mathbb{E}^{P_{i-1}}(f)^2 \le \mathbb{E}^{P_{i-1}}(f^2) = \frac{1}{\delta_{i-1} - \delta_{i-2}} \int_{\delta_{i-2}}^{\delta_{i-1}} f^2(s)\, ds$$

$$\le \sum_{i=2}^N \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{\delta_{i-1} - \delta_{i-2}} \int_{\delta_{i-2}}^{\delta_{i-1}} f^2(s)\, ds \le K_\delta \int_a^b f^2(s)\, ds = K_\delta \|f\|^2_*$$

dove ho posto $K_\delta := \max_i \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{\delta_{i-1} - \delta_{i-2}}$

$\|\Pi_\delta\| := \sup_f \frac{\|\Pi_\delta f\|}{\|f\|} \leq \sqrt{K_\delta}$

iii. torno alla stima dell'eq 21

$$\|\Pi_\delta X_\cdot(\omega) - X_\cdot(\omega)\|_* \leq \|\Pi_\delta X_\cdot(\omega) - \Pi_\delta f\|_* + \|\Pi_\delta f - f\|_* + \|f - X_\cdot(\omega)\|_*$$
$$\leq \sqrt{K_\delta}\|X_\cdot(\omega) - f\|_* + \|\Pi_\delta f - f\|_* + \|f - X_\cdot(\omega)\|_*$$

$\forall \varepsilon > 0$ scelgo f tale che $\|X_\cdot(\omega) - f\|_* < \varepsilon$

scelgo $\eta > 0$: $\forall \delta \in \Delta_{a,b}$ $|\delta| \leq \eta \Rightarrow \|\Pi_\delta f - f\|_* < \varepsilon$

scelgo $\delta \in \Delta_{a,b}$ con $|\delta| \leq \eta$: $K_\delta = 1$

Allora $\|\Pi_\delta X_\cdot(\omega) - X_\cdot(\omega)\|_* \leq 3\varepsilon$

iv. Allora definisco $(\delta^{(n)})_{n\geq 1}$ $\delta^{(n)} \in \Delta_{a,b}$ $K_{\delta^{(n)}} \equiv 1$

$$\delta^{(n)} = (\delta_0^{(n)}, \delta_1^{(n)}, \dots, \delta_n^{(n)}) \qquad \delta_j^{(n)} := a + (b-a)\frac{j}{n}$$

q.o. $\omega \in \Omega$, $X_\cdot(\omega) \in L^2(a,b)$ e quindi $\Pi_{\delta^{(n)}} X_\cdot(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(a,b)} X_\cdot(\omega)$

$X^{(n)} := \Pi_{\delta^{(n)}} X$

$$\|X^{(n)} - X\|_2^2 = E\int_a^b (X_s^{(n)} - X_s)^2 ds = E\Big[\underbrace{\|X_\cdot^{(n)}(\omega) - X_\cdot(\omega)\|_*^2}_{\varphi_n^2}\Big]$$

$$\varphi_n = \varphi_n(\omega) := \|X_\cdot^{(n)}(\omega) - X_\cdot(\omega)\|_* \leq \|\Pi_{\delta^{(n)}} X\|_* + \|X\|_* \leq 2\|X\|_*$$

ho dimostrato sopra che $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} 0$

$E(\|X_\cdot(\omega)\|_*^2) = \|X\|_2^2 < \infty$ quindi φ_n è dominata da $2\|X\|_* \in L^2(\Omega)$

$\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\Omega)} 0$ ovvero $X^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{M^2} X$

★ Fine dimostrazione che $S_{a,b}^2$ è denso dentro $M_{a,b}^2$

PROPRIETÀ DI $I : M^2_{a,b} \longrightarrow L^2(\Omega)$

i. Linearità $\quad X, Y \in M^2_{a,b} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$X^{(n)} \xrightarrow{L^2} X \qquad Y^{(n)} \xrightarrow{L^2} Y \qquad \alpha X^{(n)} + \beta Y^{(n)} \xrightarrow{L^2} \alpha X + \beta Y$$

$$X^{(n)}, Y^{(n)}, \alpha X^{(n)} + \beta Y^{(n)} \in S^2_{a,b}$$

$$I(\alpha X^{(n)} + \beta Y^{(n)}) = \alpha I(X^{(n)}) + \beta I(Y^{(n)})$$

$$\Big\downarrow L^2 \text{ buona def di } I \qquad\qquad \Big\downarrow L^2 \text{ def di } I(X) \text{ e } I(Y)$$

$$I(\alpha X + \beta Y) \qquad\qquad \alpha I(X) + \beta I(Y)$$

ii. Continuità / Isometria di Itô

$\forall X \in M_{a,b}$ sia $X^{(n)} \xrightarrow{L^2} X \qquad X^{(n)} \in S^2_{a,b}$

$$\|I(X)\| \xleftarrow{\text{def di } I(X)} \|I(X^{(n)})\| \underset{\text{isom. di Itô su } S^2_{a,b}}{=} \|X^{(n)}\|_2 \xrightarrow{\text{def di } X^{(n)}} \|X\|_2$$

ora 23

DISTRIBUZIONE DI $I(X)$

$$E(I(X)) = 0 \qquad E(I(X) \mid \mathcal{F}_a) = 0 \text{ q.c.}$$

$$Var(I(X)) = E(I(X)^2) = \|I(X)\|^2 = \|X\|_2^2$$

$$E(I(X)^2 \mid \mathcal{F}_a) = \int_a^b E(X_s^2 \mid \mathcal{F}_a)\,ds$$

☆ Per dimostrarle, parto da $S^2_{a,b}$

$X \in S^2_{a,b}$ allora $X = \sum_{i=1}^{N} C_{i-1} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1}, \delta_i)}$ con $C_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{\delta_i})$

i. $\boxed{E(I(X) \mid \mathcal{F}_a) = 0 \text{ q.c.}}$

$$I(X) = \sum_{i=1}^{N} C_{i-1}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})$$

$$E(I(X) \mid \mathcal{F}_a) = \sum_{i=1}^{N} E(E(C_{i-1}\underbrace{(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) \mid \mathcal{F}_{\delta_{i-1}}}_{\text{indip.}}) \mid \mathcal{F}_a)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} E\Big(C_{i-1}\, \underbrace{E(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})}_{=0} \,|\, \mathcal{F}_a\Big) = 0 \quad q.c.$$

ii. $$\boxed{E\left(I(X)^2 \,|\, \mathcal{F}_a\right) = \int_a^b E(X_s^2 \,|\, \mathcal{F}_a)\, ds}$$

$$E\left(I(X)^2 | \mathcal{F}_a\right) = E\Big[\Big(\sum_{i=1}^{N} C_{i-1}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})\Big)^2 \,\Big|\, \mathcal{F}_a\Big]$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N} E\left[C_{i-1}C_{j-1}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})(B_{\delta_j} - B_{\delta_{j-1}}) \,|\, \mathcal{F}_a\right] = (*)$$

se $j>i$ condiziono a $\mathcal{F}_{\delta_{j-1}}$, se $j<i$ a $\mathcal{F}_{\delta_{i-1}}$, ovvero a $\mathcal{F}_{\delta_{i \vee j-1}}$

$$j>i \quad E\Big[E\big[\underbrace{C_{i-1}C_{j-1}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})}_{\mathcal{F}_{\delta_{j-1}}\text{-mis}}(B_{\delta_j} - B_{\delta_{j-1}}) \,|\, \mathcal{F}_{\delta_{j-1}}\big] \,\Big|\, \mathcal{F}_a\Big]$$

$$= E\Big[C_{i-1}C_{j-1}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})\underbrace{E\big[(B_{\delta_j} - B_{\delta_{j-1}}) \,|\, \mathcal{F}_{\delta_{j-1}}\big]}_{\text{indip} \; = 0} \,\Big|\, \mathcal{F}_a\Big]$$

$$(*) = \sum_{i=1}^{N} E\Big[C_{i-1}^2\, \underbrace{E\big[(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2 \,|\, \mathcal{F}_{\delta_{i-1}}\big]}_{\text{indip}} \,\Big|\, \mathcal{F}_a\Big] = \sum_{i=1}^{N} E(C_{i-1}^2 | \mathcal{F}_a)(\delta_i - \delta_{i-1})$$

$$= E\left[(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2\right] = \delta_i - \delta_{i-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} E(C_{i-1}^2 | \mathcal{F}_a) \int_a^b \mathbb{1}_{[\delta_{i-1}, \delta_i)}(s)\, ds = \int_a^b \sum_{i=1}^{N} E\left(C_{i-1}^2 \mathbb{1}_{[\delta_{i-1}, \delta_i)}(s) \,|\, \mathcal{F}_a\right) ds$$

$$= \int_a^b E\Big(\sum_{i,j} C_{i-1}C_{j-1} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1}, \delta_i)}(s)\, \mathbb{1}_{[\delta_{j-1}, \delta_j)}(s) \,\Big|\, \mathcal{F}_a\Big) ds = \int_a^b E(X_s^2 | \mathcal{F}_a)$$

☆ Voglio ora riportare questi risultati su $M^2_{a,b}$

$X \in M^2_{a,b}$ allora $\exists \; X^{(n)} \xrightarrow{L^2} X \quad X^{(n)} \in S^2_{a,b} \quad I(X^{(n)}) \xrightarrow{L^2} I(X)$

$E\left(I(X^{(n)}) | \mathcal{F}_a\right) = 0 \quad q.c.$

? $\downarrow$?

$E\left(I(X) | \mathcal{F}_a\right) = 0 \quad q.c.$

- Proprietà

1) Jensen condizionale:

$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convesso, $X \in L^1$, $\varphi(X) \in L^1$, allora

$$\varphi(E(X|\mathcal{G})) \leq E(\varphi(X)|\mathcal{G}) \quad q.c.$$

HW: dimostrazione sul Williams

2) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X \quad p \geq 1$, allora $E(X_n|\mathcal{G}) \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} E(X|\mathcal{G})$

<u>Dim</u> $\|E(X_n|\mathcal{G}) - E(X|\mathcal{G})\|^p_{L^p} = \|E(X_n - X|\mathcal{G})\|^p_{L^p}$

$$= E\left[\left(E(X_n - X|\mathcal{G})\right)^p\right] \leq E\left[E\left((X_n-X)^p|\mathcal{G}\right)\right] = E\left[(X_n-X)^p\right] = \|X_n - X\|^p_p$$

$\varphi(x) = x^p$ convessa

i. $\boxed{E(I(X)|\mathcal{F}_a) = 0 \quad q.c.}$

ho appena dimostrato che $0 \overset{q.c.}{=} E(I(X^{(n)})|\mathcal{F}_a) \xrightarrow{L^2} E(I(X)|\mathcal{F}_a)$

ii. $\boxed{E(I(X)^2|\mathcal{F}_a) = E\left[\int_a^b X_s^2 \, ds \,\Big|\, \mathcal{F}_a\right] \overset{(2)}{=} \int_a^b E(X_s^2|\mathcal{F}_a) ds}$

$$\underbrace{E(I(X^{(n)})^2|\mathcal{F}_a)}_{\downarrow L^1} = \int_a^b E((X_s^{(n)})^2|\mathcal{F}_a) ds \overset{(2)}{=} \underbrace{E\Big[\overbrace{\int_a^b (X_s^{(n)})^2 ds}^{\|X^{(n)}\|^2_* \xrightarrow[(1)]{L^1} \|X\|^2_*} \,\Big|\, \mathcal{F}_a\Big]}_{\downarrow L^1}$$

$I(X^{(n)}) \xrightarrow{L^1} I(X)^2$

$$E(I(X)^2|\mathcal{F}_a) \qquad\qquad E(\|X\|^2_*|\mathcal{F}_a) = E\left[\int_a^b X_s^2 ds \,\Big|\, \mathcal{F}_a\right]$$

1) La norma di $M^2_{a,b}$ è: $\|\cdot\|_2^2 = E(\|\cdot\|^2_*)$

quindi $X^{(n)} \xrightarrow{M^2} X \Rightarrow E(\|X^{(n)} - X\|^2_*) \to 0 \Rightarrow X^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\Omega; L^2(a,b))} X$

$\Rightarrow \|X^{(n)}\|_* \xrightarrow{L^2(\Omega)} \|X\|_*$

2) Integrale e speranza condizionale commutano

$V = (V_s)_{s \in I}$ $\quad I$ intervallo di $\mathbb{R}$ $\quad V \in L^1(\Omega \times I, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}, P \times \mathcal{L}; \mathbb{R}, \mathcal{B})$

$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ $\quad \sigma$-algebra

Allora $\quad E\left[\int_I V_s \, ds \,\middle|\, \mathcal{G}\right] = \int_I E(V_s \mid \mathcal{G}) \, ds \quad$ q.c.

HW: provare a dimostrare, poi vedi sotto

<u>Dim</u> wlog $V \geq 0$; $\quad E(RHS) = \int_I E(V_s) \, ds = \|V\|_{L^1} < \infty$

in particolare $V_s \in L^1(\Omega)$ q.o. $s \quad \Rightarrow E(V_s \mid \mathcal{G})$ è definito q.o. s

i. RHS è $\mathcal{G}$-mis. per definizione e L^1

ii. $\forall G \in \mathcal{G}$

$$E(\mathbb{1}_G RHS) = \int_I E[\mathbb{1}_G E(V_s \mid \mathcal{G})] \, ds = \int_I E[\mathbb{1}_G V_s] \, ds = E\left(\mathbb{1}_G \int_I V_s \, ds\right)$$

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ spazio filtrato $(B_t)_{t\geq 0}$ BM rispetto a $\mathcal{F}_t$

$0 \leq a < b$ $\quad I = I_{a,b} : M^2_{a,b} \to L^2(\Omega)$ integrale stocastico

$X, Y \in M^2_{a,b}$ allora

1) $E(I(X) \mid \mathcal{F}_a) = 0$ q.c. $\qquad E(I(X)) = 0$

2) $E(I(X)^2 \mid \mathcal{F}_a) = E\left(\int_a^b X_s^2\, ds \,\Big|\, \mathcal{F}_a\right)$ q.c. $\qquad E(I(X)^2) = \int_a^b E(X_s^2)\, ds$

(ora scorsa) $\qquad \|I(X)\|^2 = \|X\|_2^2$

3) $Cov(I(X), I(Y)) = E(I(X)I(Y)) \overset{!}{=} \langle X, Y\rangle_2$

Dim

$$\langle X+Y, X+Y\rangle_2 = \|X+Y\|_2^2 = \|I(X+Y)\|^2 = \|I(X)+I(Y)\|^2$$

$$\|X\|_2^2 + \|Y\|_2^2 + 2\langle X,Y\rangle_2 \overset{!}{=} \;\overset{!}{=} E(I(X)^2) + E(I(Y)^2) + E(2I(X)I(Y))$$

$$\overset{!}{=} \|I(X)\|^2 + \|I(Y)\|^2 + 2E(I(X)I(Y))$$

4) $I(X) = I(Y)$ q.c. $\iff \|X-Y\|_2 = 0$

Dim $\quad I(X) = I(Y)$ q.c. $\iff \|I(X) - I(Y)\| = 0$

☆ Paradossalmente I è "iniettiva"

■ Integrale stocastico come PROCESSO

$I : I_{0,t}$ $\quad t$ variabile

premessa : se ho $0 \leq a < b < c$ è vero che $\int_a^b X_s dB_s + \int_b^c X_s dB_s = \int_a^c X_s dB_s$ q.c.?

Sì : dim $\quad \underset{\in S^2_{a,b}}{Y^{(n)}} \to \underset{\in M^2_{a,b}}{Y} := X\big|_{\Omega\times[a,b)}$ $\qquad \underset{\in S^2_{b,c}}{Z^{(n)}} \to \underset{\in M^2_{b,c}}{Z} := X\big|_{\Omega\times[b,c]}$

$$X_t^{(n)} := \begin{cases} Y_t^{(n)} & t \in [a,b) \\ Z_t^{(n)} & t \in [b,c] \end{cases} \in S^2_{a,c}$$

$X^{(n)} \xrightarrow{M^2} X$, infatti :

$$\|X - X^{(n)}\|_2^2 = \int_a^c E(\ \ ^2)ds = \int_a^b + \int_b^c = \|Y - Y^{(n)}\|_2^2 + \|Z - Z^{(n)}\|_2^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$I_{a,b}(X) + I_{b,c}(X) \overset{?}{=} I_{a,c}(X) \qquad \delta^{(n)} \in \Delta_{a,c} \qquad \delta^{(n)} = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N) \quad \delta_M = b$$

$$I_{a,b}(X^{(n)}) := \sum_{i=1}^{M} C_{i-1}^{(n)} (B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})$$

$$I_{b,c}(X^{(n)}) := \sum_{j=M+1}^{N} C_{j-1}^{(n)} (B_{\delta_j} - B_{\delta_{j-1}})$$

$$I_{a,c}(X^{(n)}) := \sum_{i=1}^{N} C_{i-1}^{(n)} (B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) = I_{a,b}(X^{(n)}) + I_{b,c}(X^{(n)})$$

mando $n \to \infty$ e chiudo.

- $T > 0$ deterministico $\quad \forall t \in [0, T] \quad I_t := I_{0,t}$

$X \in M^2_{0,T} \qquad I_t(X) = \int_0^t X_s \, dB_s \qquad (I_t)_{t\geq 0}$ processo stocastico

Per ogni $t \in [0, T]$ $\quad I_t(X)$ è definito per q.o. ω

$\to$ vuol dire che I_t è definito a meno di modificazioni

$\to$ dimostreremo che $\exists!$ modificazione continua.

MARTINGALE

A tempo discreto	A tempo continuo
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$ $\quad X=(X_n)_{n\geq 0}$	$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ $\quad X=(X_t)_{t\geq 0}$

X è una martingala rispetto alla filtrazione assegnata se:

i. X è adattato	i. X è adatto
ii. $X_n \in L^1(\Omega)$ $\forall n$	ii. $X_t \in L^1(\Omega)$ $\forall t \geq 0$
iii. $E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$ q.c. $\forall n \geq 1$	iii.
$\Updownarrow$	
$\forall n > m$ $\quad E(X_n \mid \mathcal{F}_m) = X_m$ q.c.	$\forall t > s$ $\quad E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$ q.c.
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$E(X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0$ q.c.	$E(X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s) = 0$ q.c.

☆ se in qualunque delle iii. sostituisco $=$ con $\leq$ o $\geq$ ottengo

$=$ martingala

$\leq$ supermartingala

$\geq$ sottomartingala

☆ Se X martingala $\quad E(X_t) = E(X_0)$ $\forall t$ $\quad$ ($\leq$ e $\geq$ per le altre)

☆ Se X martingala, $X_t - X_0$ è martingala uscente da zero

☆ Se non specifico la filtrazione, si intende quella naturale, quindi i. è gratis

• Esempi di martingale a tempi discreti

1) $X = (X_n)_{n\geq 1}$ $\quad X_n$ v.a. L^1 iid $\quad E(X_n) = 0$

$$\begin{cases} S_n := X_1 + \ldots + X_n & \forall n \geq 1 \\ S_0 = 0 \end{cases} \qquad S = (S_n)_{n\geq 0} \text{ è una martingala}$$

i. gratis

ii. L^1 è uno sp. vett.

iii. $E(S_n - S_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(X_n) = 0$. q.c.

2) $X = (X_n)_{n\geq 1}$ X_n v.a. L^1 i.i.d. $E(X_n) = 1$

$$\begin{cases} P_n = \prod_{i=1}^{n} X_i & n \geq 1 \\ P_0 = 1 \end{cases}$$

$P = (P_n)_{n\geq 0}$ è una martingala

i. è gratis

ii. $X, Y \in L^1(\Omega)$ e X, Y indip. allora $XY \in L^1(\Omega)$

iii. $E(P_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(P_{n-1} X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = P_{n-1} E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = P_{n-1}$ q.c.

---

ora 25

3) $X \in L^1$ $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ filtrazione

$Y_n := E(X \mid \mathcal{F}_n)$ q.c.

$Y = (Y_n)_{n\geq 0}$ è una martingala

i. per def.

ii. ovvio

iii. $E(Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(E(X \mid \mathcal{F}_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(X \mid \mathcal{F}_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(X \mid \mathcal{F}_{n-1})$

$= Y_{n-1}$ q.c.

HW: proprietà "torre"

- Esempi di martingale a tempi continui

1) Il moto browniano

i. per def.

ii. $B_t \in L^1$ (è gaussiana)

iii. $E(B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s) = E(B_t - B_s) = 0$ q.c.

2) Mi domando se posso dire qualcosa per B_t^2 $s < t$

$$E(B_t^2 \mid \mathcal{F}_s) = E\left[\left((B_t - B_s) + B_s\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right]$$

$$= E\left[(B_t - B_s)^2 + 2B_s(B_t - B_s) + B_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right]$$

$$= \underbrace{E((B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s)}_{t-s} + 2B_s \underbrace{E(B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s)}_{0} + B_s^2$$

$$= t - s + B_s^2$$

$E(B_t^2 | \mathcal{F}_s) \geq B_s^2$ $\qquad$ B_t^2 è una sottomartingala

HW: Se X è martingala e φ è convessa, allora $\varphi(X)$ è sottom.

★ $E(B_t^2 - t | \mathcal{F}_s) = B_s^2 - s$

$\Rightarrow$ $\boxed{B_t^2 - t \text{ è una martingala}}$

3) Studiamo $e^{\lambda B_t}$

$$E(e^{\lambda B_t} | \mathcal{F}_s) = E(e^{\lambda(B_t - B_s)} e^{\lambda B_s} | \mathcal{F}_s) = e^{\lambda B_s} E(e^{\overbrace{\lambda(B_t - B_s)}^{\mathcal{N}(0, \lambda^2(t-s))}})$$

$$= e^{\lambda B_s} e^{\frac{\lambda^2}{2}(t-s)}$$

$$\boxed{Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad E(e^Z) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t} \text{ è una martingala}}$

■ Analogo discreto dell'integrale stocastico

$$\int_0^b X_s \, dB_s \approx \sum_{i=1}^N X_{\delta_{i-1}} (B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})$$

limitato q.c. oppure $X_n, M_n \in L^2(\Omega)$ $\forall n$

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, P)$ $\quad$ X adattato e ~~L^1~~ ; M martingala risp. a $\mathcal{F}_n$

(super/sotto)

$Y := X \bullet M$ $\qquad$ $Y = (Y_n)_{n \geq 0}$

martingala

Def

$$\begin{cases} Y_n := \sum_{i=1}^n X_{i-1}(M_i - M_{i-1}) & n \geq 1 \\ Y_0 := 0 \end{cases}$$

★ Y è una martingala (super/sotto)

iii. $E(Y_n - Y_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = E(X_{n-1}(M_n - M_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1})$

$$= X_{n-1} E(M_n - M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) \overset{\geq}{\underset{\leq}{=}} 0 \text{ q.c.}$$

ii. da verificare $\qquad$ (vedi ora 28)

i. per definizione

★ M_n il valore nel tempo di una azione ; martingala

X_n è la strategia di investimento

$X_{i-1}(M_i - M_{i-1})$ è il guadagno nell'intervallo $i-1 \sim i$

Y_n è quanto ho guadagnato fino al tempo n.

$\Rrightarrow$ $E(Y_n) = 0$ $\forall n$ indipendentemente dalla strategia

• $E(Y_\tau) \stackrel{?}{=} 0$ non sempre

τ casuale

→ esempio : la martingala o gioco al rilancio

tiro una moneta (molte volte) ogni volta se esce testa

raddoppio quello che ho scommesso, se esce croce, lo perdo

$M_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$ Z_i iid, bernoulliane

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{se lancio i-esimo testa} \\ -1 & \text{se croce} \end{cases}$$

$X_0 = 1$ — se vinco $X_k = 0$ $k \geq 1$

— se perdo $X_1 = 2$ — se vinco $X_k = 0$ $k \geq 2$

— se perdo $X_2 = 4$ — . . .

— $X_3 = 8$

. . .

$$X_n = \begin{cases} 2^n & \text{se } Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n = -1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\tau = \inf\{n \geq 1 : Z_n = 1\}$ $\tau < \infty$ q.c.

$Y_\tau = 1$ q.c. $E(Y_n) = 0$ $\forall n$

(check)

$Y_n = \sum X_{i-1} Z_i$

TEMPI D'ARRESTO

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$ | $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$

τ v.a. $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ | τ v.a. $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$

Def τ è tempo di arresto relativamente alla filtrazione se

$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n$

$\Updownarrow$

$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n$ | $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t$

$\Updownarrow$

$C_n^\tau := \mathbb{1}_{\tau > n}$ processo adattato

Def Hitting time di un processo adattato X rispetto ad un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$

$\tau_A := \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$ | $\tau_A := \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}$

★ τ_A è un tempo di arresto

★ se X è continuo a destra e A è chiuso, τ_A è un t.d.a.

★ se X è cont. a destra, $\mathcal{F}$ è cont. a destra e A è aperto τ_A è t.d.a.

$$\boxed{\mathcal{F}_{t^+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t}$$

• **Dim** (discreto)

X adattato

$$\{\tau_A \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{X_k \in A\} \in \mathcal{F}_n$$

• **Dim** (continuo, A chiuso)

$$\{\tau_A \leq t\} \in \mathcal{F}_t \iff \{\tau_A > t\} \in \mathcal{F}_t$$

aperto

$$\{\tau_A > t\} = \bigcap_{s\in[0,t]} \{X_s \notin A\} \overset{?}{=} \bigcap_{[0,t]\cap\mathbb{Q} \cup \{t\}} \{X_s \in A^c\} \in \mathcal{F}_t$$

fisso ω : X cont. a destra $\forall s \in [0,t)$ se $X_s \in A^c$ $\exists s_n \downarrow s$: $s_n \in [0,t] \cap \mathbb{Q}$ e $X_{s_n}(\omega) \to X_s(\omega)$ per cui $X_{s_n}(\omega) \in A^c$ definitivamente

★ l'altro caso è simile

• **Def** X processo adattato $(X_n)_{n\geq 0}$ o $(X_t)_{t\geq 0}$, τ tempo di arresto

X^τ il processo arrestato coincide con X fino a τ ed è costante dopo

$X^\tau_n := X_{n\wedge\tau}$ | $X^\tau_t := X_{t\wedge\tau}$

★ Se M è una martingala (super/sotto) e τ è tda allora M^τ è una martingala (super/sotto)

Dim (discreto)

$$M^\tau = M_0 + \underbrace{C^\tau \bullet M}_{\text{martingala (super/sotto)}} \qquad \text{infatti}$$

$$M_0 + (C^\tau \bullet M)_n = M_0 + \sum_{i=1}^{n} C^\tau_{i-1}(M_i - M_{i-1}) = M_0 + \sum_{i=1}^{n\wedge\tau}(M_i - M_{i-1}) = M_{n\wedge\tau} = M^\tau_n$$

$$C^\tau_{i-1} = \mathbb{1}_{\tau > i-1} \Leftrightarrow i \leq \tau$$

■ OPTIONAL STOPPING THEOREM (DOOB)

$\boxed{\text{se } \tau < \infty \text{ q.c. t.d.a.}}$ allora $X^\tau_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} X_\tau$

$\forall n \geq 0 \ \forall \omega \in \{\tau \leq n\} \ \forall m \geq n \quad X^\tau_m(\omega) = X_{m\wedge\tau}(\omega) = X_\tau(\omega) \qquad X^\tau_m(\omega) \xrightarrow[m\to\infty]{} X_\tau(\omega)$

$$\forall \omega \in \underbrace{\bigcup_{n\geq 0}\{\tau \leq n\}}_{\{\tau<\infty\} \text{ che è q.c.}}, \quad X^\tau_m(\omega) \xrightarrow[m\to\infty]{} X_\tau(\omega)$$

★ Posso dire che $X^\tau_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} X_\tau$?

i. Se $|X_n| \leq K$ q.c. è vero per convergenza dominata

ii. Se $\tau \leq K$ q.c. è vero perché X^τ_n è costante per $n > K$

- **Thm** Se τ t.d.a. q.c. finito e X martingala (super/sotto) e inoltre vale una delle seguenti:

  i. X q.c. limitata

  ii. τ q.c. limitato

  iii. $E(\tau) < \infty$ e $X_n - X_{n-1}$ q.c. limitato

  Allora $E(X_\tau) \overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} E(X_0)$

Dim iii. $|X_n^\tau| \leq |X_0| + \sum_{i=1}^{n} C_{i-1}^\tau \underbrace{|X_i - X_{i-1}|}_{\leq K} \leq |X_0| + K\tau \in L^1$

quindi applico di nuovo il teorema di convergenza dominata e ho $X_n^\tau \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} X_\tau$

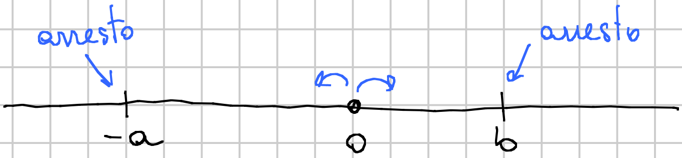
☆ iv. X supermartingala positiva ($\tau < \infty$ q.c.)

Allora $E(X_\tau) \leq E(X_0)$

HW: fare con Fatou

ESEMPI DI APPLICAZIONI

1) S_n SSRW uscente da zero



$\tau = \tau^{\{-a,b\}}$ è un hitting time, quindi è un t.d.a.

S^τ è una martingala. Voglio usare O.S.T. i. ii. sono false

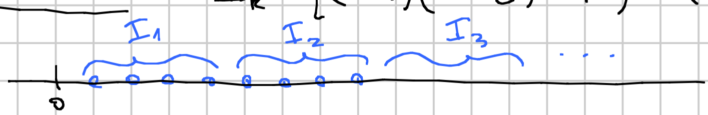
iii. è vera (claim) $\Rightarrow E(S_\tau) = E(S_0) = 0$

$0 = -a\,P(S_\tau = -a) + b\,P(S_\tau = b)$

$P(S_\tau = b) = \frac{a}{b} P(S_\tau = -a) = \frac{a}{a+b}$ $\qquad P(S_\tau = -a) = \frac{b}{a+b}$

$1 - P(S_\tau = b)$

dim claim $I_k = [(k-1)(a+b)+1 \,;\, k(a+b)]$



$$P(\tau \in I_k \mid \tau \notin I_1 \cup \dots \cup I_{k-1}) \geq 2^{-(a+b)} \qquad \forall k$$

$$P(\tau > k(a+b)) = P\left(\bigcap_{j=1}^{k} \{\tau \notin I_j\}\right) =$$

$$= \underbrace{P(\tau \notin I_1)\, P(\tau \notin I_2 \mid \tau \notin I_1)}_{\substack{P(\{\tau \notin I_1\} \cap \{\tau \notin I_2\}) \\ = P(\tau \notin I_1 \cup I_2)}} P(\tau \notin I_3 \mid \tau \notin I_1 \cup I_2) \cdot \ldots \cdot P\left(\tau \notin I_k \mid \tau \notin \bigcup_1^{k-1} I_j\right)$$

$$\leq \left(1 - 2^{-(a+b)}\right)^k$$

quindi $E(\tau) < \infty$

$$\star \quad E(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} P(\tau > j) \qquad (hp: \tau \in \mathbb{N}) \quad \text{(check)}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(\tau > j) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (a+b)\left(1 - 2^{-(a+b)}\right)^k + C < \infty$$

primo blocchetto $j = 0 \dots a+b$

2) S_n SSRW $\quad S_0 = 0 \quad X = C \bullet S \quad C_n = \alpha + \beta S_n$

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} (\alpha + \beta S_{i-1})(S_i - S_{i-1}) = \alpha S_n + \beta \sum_{i=1}^{n} (S_{i-1} S_i - S_{i-1}^2)$$

$$\frac{1}{2}\Big(\underbrace{-S_i^2 + 2 S_{i-1} S_i - S_{i-1}^2}_{-(S_i - S_{i-1})^2} \underbrace{- S_{i-1}^2 + S_i^2}_{S_i^2 - S_{i-1}^2}\Big) = \frac{1}{2}\left(S_i^2 - S_{i-1}^2\right) - \frac{1}{2}\underbrace{(S_i - S_{i-1})^2}_{1}$$

telescopica

$$X_n = \alpha S_n + \frac{\beta}{2}\underbrace{(S_n^2 - n)}_{\text{martingala}}$$

martingala

scegliendo α e β ottengo vari polinomi in S_n

(check)

$X_\tau = k$ riesco ad ottenerlo? Occorre che il polinomio abbia radici $-a$ e b

$$p(x) = (x+a)(x-b) + k = x^2 + (a-b)x \underbrace{- ab + k}_{=0}$$

$\beta = 2 \qquad \alpha = a - b \qquad k = ab$

$X_n = (a-b) S_n + (S_n^2 - n)$ è tale per cui $X_\tau = k - n = ab - n$

$\to$ applico O.S.T. (caso iii. un po' più raffinato)

$$ab - E(\tau) = E(X_\tau) = E(X_0) = 0 \implies E(\tau) = ab$$

ANALISI STOCASTICA

ora 28

Note Title 16/01/2013

■ Sistemiamo j^* dell'ora 19

hp $\begin{cases} (\Omega, \mathcal{F}, P) \quad X \in L^1 \quad \mathcal{G} \text{ sotto } \sigma\text{-alg di } \mathcal{F} \\ \text{sia } Y = E(X|\mathcal{G}) \text{ q.c.}, \quad V \ \mathcal{G}\text{-misurabile} \\ XV \in L^1 \quad (\text{oppure } YV \in L^1) \quad (*) \end{cases}$

ts : $YV \in L^1$ (oppure $XV \in L^1$) e si ha: $E(XV) = E(YV)$ (1)

<u>Dim</u> a) $\forall G \in \mathcal{G}$ la (1) vale con $V = 1\!\!1_G$ $\forall X \in L^1$

(l'ipotesi (*) è gratis) $E(Y 1\!\!1_G) = E(Y; G) = E(X; G) = E(X 1\!\!1_G)$

$S(\mathcal{G}) := \{\text{funzioni semplici } \mathcal{G}\text{-mis}\} = \{\sum_{k=1}^n a_k 1\!\!1_{G_k},\ a_k \in \mathbb{R},\ G_k \in \mathcal{G}\}$

di nuovo (*) è gratis per $V \in S(\mathcal{G})$ — non dipende da ω

$|XV| = |X| \, |\sum a_k 1\!\!1_{G_k}| \leq |X| \sum |a_k| \leq C|X|$

$E|XV| \leq C\, E|X| < \infty$

(1) vale per linearità per $V \in S(\mathcal{G})$

b) Sia ora V $\mathcal{G}$-misurabile $V \geq 0$ q.c. e tale che (*) sia vera

allora $\exists (V_n)_{n \geq 1}$ $V_n \in S(\mathcal{G})$ $V_n \uparrow V$ q.c. (non serve in L^1)

★ se $X \geq 0$ q.c. $XV_n \uparrow XV$ q.c. e anche in L^1 per (MON) $\Rightarrow E(XV_n) \uparrow E(XV)$

↳ $Y \geq 0$ q.c. $YV_n \uparrow YV$ q.c.

per (MON) $E(YV_n) \uparrow E(YV)$ eventualmente ∞

ma $V_n \in S(\mathcal{G})$ ((*) è gratis) $\Rightarrow E(XV_n) = E(YV_n)$ $\forall n$

quindi $E(YV) = \lim_n E(YV_n) = \lim_n E(XV_n) = E(XV) < \infty$

→ questo ragionamento funziona uguale prendendo l'altra (*)

★★ se X generico $X = X^+ - X^-$

$|XV| = |X| V = (X^+ + X^-) V = |X^+ V| + |X^- V|$ quindi $XV \in L^1 \Rightarrow X^\pm V \in L^1$

posso applicare ★ due volte e per linearità vale (1)

c) V qualsiasi $\quad V = V^+ - V^-$

$$|XV| = |X||V| = |X|(V^+ + V^-) = |XV^+| + |XV^-|$$, quindi chiudo come sopra.

- j. diventa:

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad X \in L^1 \quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \quad Y = E(X|\mathcal{G}) \quad Z$ $\mathcal{G}$-misurabile tale che $XZ \in L^1$ (oppure $YZ \in L^1$), allora $YZ \in L^1$ (oppure $XZ \in L^1$) e inoltre

$$\boxed{E(XZ|\mathcal{G}) = Z\,E(X|\mathcal{G})}$$

(check)

- Riprendo la verifica che $Y_n = \sum_1^n X_{i-1}(M_i - M_{i-1}) \in L^1$ (ora 25)

$$E(\overbrace{Y_n - Y_{n-1}}^{XZ} | \mathcal{F}_{n-1}) = E(\overbrace{X_{n-1}(M_n - M_{n-1})}^{XZ} | \mathcal{F}_{n-1})$$

$$= \underset{Z}{X_{n-1}}\, E(M_n - M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) \overset{\geq}{\underset{\leq}{=}} 0 \text{ q.c.}$$

$$\underbrace{E(\overbrace{M_n - M_{n-1}}^{X} | \mathcal{F}_{n-1})}_{Y} = 0 \text{ q.c.} \qquad Y = 0 \text{ q.c.} \Rightarrow YZ \in L^1$$

$$\Rightarrow E(XZ|\mathcal{F}_{n-1}) = 0 \text{ q.c.}$$

- Ancora sugli esempi di uso delle martingale: ABRACADABRA

È data una successione di lettere prese dall'alfabeto internazionale di 26 lettere. Si suppone che siano indipendenti e distribuite unif.

Q: dopo quante lettere in media si completa per la prima volta la scritta "ABRACADABRA"?

i. 1 sola lettera "A" è un processo di Bernoulli con $p = \frac{1}{26}$

Il tempo τ perché compaia la prima A ha legge geom.

$$P(\tau = k) = (1-p)^{k-1} p \qquad k \geq 1$$

$$E(\tau) = \dots = \frac{1}{p} = 26$$

ii. 2 lettere dipende dalla stringa! Tanti conti...

$$E(\tau_{AB}) = 26^2$$

$$E(\tau_{AA}) = 26^2 + 26$$

iii. ABRACADABRA

successione infinita di scommettitori tutti soci e con 1 € ciascuno
lo scommettitore n-esimo inizia a scommettere alla lettera n-esima
della stringa : 1€ che sia 'A', se vince (26€) tutti che
la prossima sia 'B', ecc. ecc.
Ci si ferma al primo ABRACADABRA, al tempo τ
Quanti sono i soldi totali in τ ?

$$26^{11} + 26^4 + 26 = E(\tau)$$

---

ord 29

$(L_n)_{n\geq 1}$ sequenza iid. $L_n \in \{'A','B',\dots,'Z'\}$ $P(L_n = \ell) = \frac{1}{26}$

$(S_n)_{n=1,\dots,11}$ $S_1 = 'A'$ $S_2 = 'B'$ $S_3 = 'R'$, ..., $S_{11} = 'A'$, $S_{12} = 'Q'$, $S_{13} = 'Q'$, ...

$Y_n^{(i)}$ i guadagni dello scommettitore (i) al tempo n $i = 0, 1, 2, \dots$

$$Y_n^{(i)} + 1 = \begin{cases} \prod_{j=i+1}^{n} X_j^{(i)} & n > i \\ 1 & n \leq i \end{cases}$$

$$X_j^{(i)} := \begin{cases} 26 & \text{se } L_j = S_{j-i} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \forall j \geq i+1$$

indipendenti se fisso (i) e faccio variare $j = i+1, i+2, \dots$

$$E(X_j^{(i)}) = 26 \cdot P(L_j = S_{j-i}) + 0 = 26 \cdot \frac{1}{26} = 1$$

Quindi $(Y_n^{(i)} + 1)_{n\geq 1}$ è una martingala di media 1 $(\forall i = 0, 1, 2, \dots)$

$\tau := \inf \{ n : L_n = S_{11}, L_{n-1} = S_{10}, \dots, L_{n-10} = S_1 \}$ è un t.d.a.

$$Y_n := \sum_{i=0}^{\infty} Y_n^{(i)} = \sum_{i=0}^{n-1} Y_n^{(i)}$$

vincite totali al tempo n

$$Y_\tau = \sum_{i=0}^{\tau-1} Y_\tau^{(i)} = \sum_{i=0}^{\tau-1} \left(Y_\tau^{(i)} + 1\right) - \tau = \sum_{i=\tau-11}^{\tau-1} \left(Y_\tau^{(i)}+1\right) - \tau$$

$$\left(Y_\tau^{(\tau-1)}+1\right) + \left(Y_\tau^{(\tau-4)}+1\right) + \left(Y_\tau^{(\tau-11)}+1\right) - \tau = 26 + 26^4 + 26^{11} - \tau$$

$$0 = E(Y_n) \overset{!}{=} E(Y_\tau) = E\left(26^{11} + 26^4 + 26 - \tau\right) \Rightarrow E(\tau) = 26^{11} + 26^4 + 26$$

optional stopping theorem ci vuole $E(\tau) < \infty$ (check)
e incrementi limitati entro τ (check)

DISUGUAGLIANZA MASSIMALE DI DOOB

Tempi discreti: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}, P)$

$(X_n)_n$ submartingala positiva $\forall \lambda > 0$

$$\boxed{P\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k \geq \lambda\right) \leq \frac{E(X_n)}{\lambda}}$$

Disuguaglianza di Markov: $X \geq 0$ $\quad P(X \geq \lambda) \leq \dfrac{E(X)}{\lambda}$ è meno fine

Dim (Caravenna e Williams)

$$X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq E(X; X \geq \lambda) \geq \lambda P(X \geq \lambda)$$

$$E(X_n; X_k \geq \lambda) \geq E(X_k; X_k \geq \lambda) \geq \lambda P(X_k \geq \lambda)$$

sub m. $\quad \mathcal{F}_k$

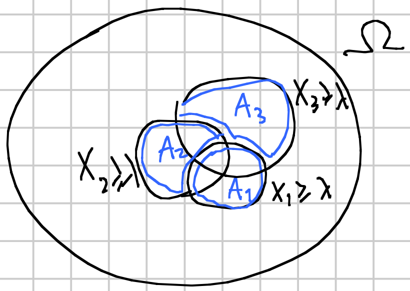
$E(X_n \mid \mathcal{F}_k) \geq X_k$ q.c.

somma su $k = 1, 2, \dots, n$

$$E(X_n) \geq E(X_n; \max_k X_k \geq \lambda) \leq ? \geq \lambda \sum_k P(X_k \geq \lambda) \geq \lambda P(\max_k X_k \geq \lambda)$$

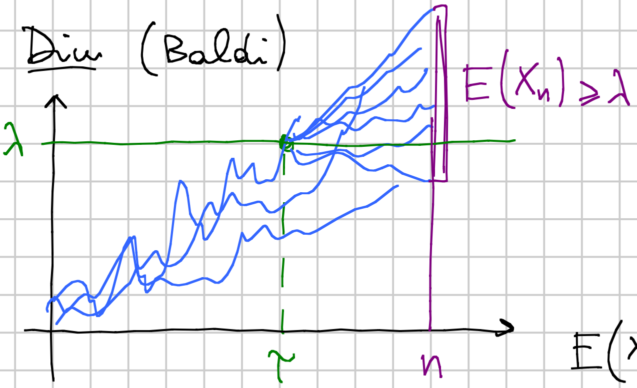
$$A \in \mathcal{F} \qquad E(X; A) \geq E(X; \{X \geq \lambda\} \cap A) \geq \lambda P(\{X \geq \lambda\} \cap A)$$

$$E(X_k; A_k) \geq \lambda P(\{X_k \geq \lambda\} \cap A_k)$$



$A_k = \{X_k \geq \lambda, \; X_i < \lambda \;\; \forall i = 1, 2, \dots, k-1\}$
disgiunti
la dimostrazione si chiude (check)

Dim (Baldi)



$\tau := \inf\{n : X_n \geq \lambda\}$

intuizione

$E(X_n \mid \tau \leq n) \geq \lambda$

$\Updownarrow$

$$\frac{E(X_n)}{\lambda} \geq \frac{E(X_n ; \tau \leq n)}{\lambda} \geq P(\tau \leq n) = P\left(\max_{k \leq n} X_k \geq \lambda\right)$$

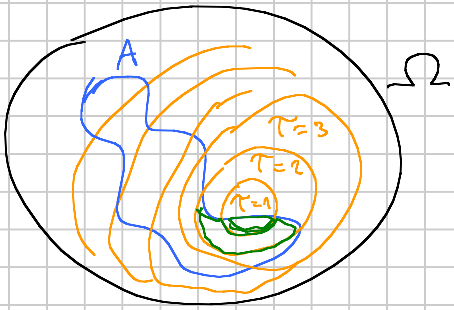
- La σ-algebra $\mathcal{F}_\tau$

τ un t.d.a. rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ oppure $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$

$\mathcal{F}_\tau$: "gli eventi decidibili entro τ"

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : \forall n \geq 0 \quad A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$$ ← generalizzabile a continuo t

$$= \{A \in \mathcal{F} : \forall n \geq 0 \quad A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n\}$$ ← comoda per capire



HW: se $\tau = n$ q.c. allora $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_n$

Q: forse serve l'ipotesi di completezza?

- Optional sampling theorem

$\tau_1 \leq \tau_2 \leq k$ q.c. $\qquad X_n$ martingala

$$E(X_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}) = X_{\tau_1} \quad \text{q.c.}$$

ANALISI STOCASTICA

ora 30

Note Title 17/01/2013

- Optional sampling theorem

$\tau_1 \le \tau_2 \le k$ q.c. X_n supermartingala, allora $X_{\tau_i} \in L^1$ $i=1,2$

$$\boxed{E(X_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}) \le X_{\tau_1} \quad q.c.}$$

Dim $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$ $E(X_{\tau_2}; A) \overset{?}{\le} E(X_{\tau_1}; A)$

$j \le k$ $E(X_{\tau_1}; A \cap \{\tau_1 = j\}) = E(X_j; A \cap \{\tau_1 = j\}) \ge E(X_k; A \cap \{\tau_1 = j\})$

$\mathcal{F}_j$

sommo su $j = 1, 2, \dots, k$

$$E(X_{\tau_1}; A) \ge E(X_k; A)$$

$X \leftarrow X^{\tau_2}$ è una supermartingala

$X_n^\tau := X_{n \wedge \tau}$

$$E(X_{\tau_1}; A) = E(X_{\tau_1}^{\tau_2}; A) \ge E(X_k^{\tau_2}; A) = E(X_{\tau_2}; A) \qquad \square$$

☆ Dim 2 della disug. massimale

X_n submartingala positiva, $\lambda > 0$, $\tau = \inf\{n : X_n \ge \lambda\}$

$E(X_n \mid \tau \le n) \overset{?}{\ge} \lambda$ $\qquad \tau_1 = \tau \wedge n \quad \tau_2 = n$

$E(X_n \mid \mathcal{F}_{\tau_1}) \ge X_\tau \ge \lambda$ $\qquad \tau_1 \le \tau_2 \le n$ q.c.

$\{\tau \le n\} \overset{?}{\in} \mathcal{F}_{\tau_1}$ $\qquad A_u = \{\tau \le n\} \cap \{\overset{\tau \wedge n}{\tau_1} \le u\} \in \mathcal{F}_u \quad \forall u$

$n \le u \Rightarrow \tau \wedge n \le n \le u$

$A_u = \{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_u$

$n > u$ $\{\tau \wedge n \le u\} = \{\tau \le u\}$

$A_u = \{\tau \le u\} \in \mathcal{F}_u$

Disuguaglianza massimale a tempi continui

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ $\quad X = (X_t)_t$ subm. positiva cont. a destra

$$\forall \lambda > 0 \ \forall t \geq 0 \quad P\left(\sup_{[0,t]} X_s \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} E(X_t)$$

__Dim 1__ (Caravenna, Baldi)

$t \geq 0 \qquad \delta \in \Delta_{0,t} \qquad \delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N) : 0 = \delta_0 < \delta_1 < \dots < \delta_n = t$

$$P\left(\sup_i X_{\delta_i} \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} E(X_t) \qquad \forall \delta \in \Delta_{0,t}$$

$(X_{\delta_i})_{i\geq 0}$ è subm. a tempi discreti rispetto $(\mathcal{F}_{\delta_i})_{i\geq 0}$

$k \geq i \qquad E(X_{\delta_k} | \mathcal{F}_{\delta_i}) \geq X_{\delta_i}$ ovvio

$\delta^{(n)} \in \Delta_{0,t} \qquad \delta^{(n)} \uparrow [0,t] \cap \mathbb{Q} =: D \qquad Y_n := \sup_i X_{\delta_i^{(n)}}$

$Y_n \uparrow Y$ q.c. $\qquad Y = \sup_{[0,t]} X_s$ qui uso la continuità

$$\{Y_n > \lambda\} \uparrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Y_n > \lambda\} = \{\omega \in \Omega : Y_n(\omega) > \lambda \text{ def}^{\text{ente}}\} = \{Y > \lambda\}$$

$$P(Y > \lambda) = \lim_n P(Y_n > \lambda) \leq \limsup_n P(Y_n \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} E(X_t)$$

$\lambda \leftarrow \lambda - \varepsilon \qquad P(Y > \lambda - \varepsilon) \leq \frac{1}{\lambda - \varepsilon} E(X_t) \qquad \varepsilon \downarrow 0$

$$\{Y > \lambda - \varepsilon\} \downarrow \bigcap_{\varepsilon} \{Y > \lambda - \varepsilon\} = \{Y \geq \lambda\}$$

$$P(Y \geq \lambda) = \lim_{\varepsilon} P(Y > \lambda - \varepsilon) \leq \limsup_{\varepsilon} \frac{1}{\lambda - \varepsilon} E(X_t) = \frac{1}{\lambda} E(X_t)$$

__Dim 2__ Uguale a quello del caso discreto. Unica osservazione:

$\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq \lambda\}$ è hitting time di $[\lambda, \infty)$ che è chiuso; X_t è cont a destra $\Rightarrow$ τ è t.d.a.

Si basa su:

Optional sampling theorem (Doob) a tempi continui

$(X_t)_{t\geq 0}$ supermart. cont. a destra $\quad \tau_1 \leq \tau_2 \leq k$ q.c.

$$X_{\tau_1}, X_{\tau_2} \in L^1 \qquad E(X_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}) \leq X_{\tau_1} \quad \text{q.c.}$$

Dim sul Baldi, corta, ma usa la convergenza L^1 delle martingale U.I.

---

ora 31

- Una martingala (super/sub) cont. a destra arrestata è una mart. (sup/sub) (a tempi continui)

$(M_t)_{t\geq 0}$ supermartingala τ t.d.a. allora M^τ è superm.

$\boxed{M_t^\tau := M_{\tau\wedge t}}$

Dim i. $\forall t\geq 0 \quad M_t^\tau \in L^1$ (OST, vedi sotto)

ii. $\forall t\geq 0 \quad M_t^\tau$ è $\mathcal{F}_t$-mis ovvio

iii. $\forall 0\leq s\leq t \quad E(M_t^\tau \mid \mathcal{F}_s) \leq M_s^\tau$

iii. $E(\underbrace{M_{\tau\wedge t}}_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_s) \overset{?}{\leq} \underbrace{M_{\tau\wedge s}}_{\tau_1}$ $\quad \tau_1 := \tau\wedge s \quad \tau_2 : \tau\wedge t$

$\tau_1 \leq \tau_2 \leq t$ q.c.

OST $\Rightarrow E(M_{\tau\wedge t} \mid \mathcal{F}_{\tau\wedge s}) \leq M_{\tau\wedge s}$

$\Rightarrow \forall A\in \mathcal{F}_{\tau_1} \quad E(M_{\tau_2}; A) \leq E(M_{\tau_1}; A) \qquad (1)$

$\forall C\in \mathcal{F}_s \qquad C = A\cup B := C\cap\{\tau\leq s\} \cup C\cap\{\tau > s\}$

su A $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ quindi $E(M_{\tau_2}; A) = E(M_{\tau_1}; A)$

se verifico che $E(M_{\tau_2}; B) \overset{?}{\leq} E(M_{\tau_1}; B)$

sommando ho la tesi

siccome (1) vale per $A\in\mathcal{F}_{\tau_1}$, cerco di vedere se $B\in\mathcal{F}_{\tau_1}$

$B = C\cap\{\tau > s\} \in \mathcal{F}_{\tau_1}$

$\Updownarrow$

$\forall u\geq 0 \quad C\cap\{\tau>s\}\cap\{\tau_1\leq u\}\in\mathcal{F}_u$

$\Updownarrow$

$C\cap\{\tau>s, s\leq u\}\in\mathcal{F}_u$

$\rightarrow s>u \quad \emptyset\in\mathcal{F}_u$

$\rightarrow s\leq u \quad C\cap\{\tau>s\}\in\mathcal{F}_s\subseteq\mathcal{F}_u$ $\square$

Continuità dell'integrale stocastico

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ $\quad B \quad BM \quad X \in M^2_{0,T} \quad T>0$

$$I_{a,b} : M^2_{a,b} \longrightarrow L^2 \qquad I_{a,b}(Y) = \int_a^b Y_s \, dB_s = P\text{-}\lim_n I(Y^{(n)})$$

$$t \in [0,T] \quad \int_0^t X_s \, dB_s := I_{0,t}\left(X\big|_{\Omega\times[0,t]}\right) =: I_t$$

$$Y \in M^2_{a,b} \quad \exists\, Y^{(n)} \in S^2_{a,b} \;:\; Y^{(n)} \xrightarrow{M^2} Y$$

$$S^2_{a,b} = \left\{ \sum_{i=1}^N c_{i-1} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)} \;,\; \delta \in \Delta_{a,b} \;,\; c_n \in L^2(\mathcal{F}_{\delta_n}) \; \forall n \right\}$$

$$I_{a,b} : \sum_{i=1}^N c_{i-1} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)} \longmapsto \sum c_{i-1}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})$$

$$I_{a,b}(Y^{(n)}) \xrightarrow{L^2} I_{a,b}(Y) := P\text{-}\lim_n I_{a,b}(Y^{(n)})$$

tesi: I_t ammette una modificazione q.c. continua

<u>Dim</u> $X \in M^2_{0,T} \quad X^{(n)} \in S^2_{0,T} \;:\; X^{(n)} \xrightarrow{M^2} X \quad$ sia $\delta^{(n)} \in \Delta_{0,T}$ la partizione associata

(sceglieremo poi $X^{(n)}$ in modo che la convergenza sia rapida e $|\delta^{(n)}| \to 0$)

$$X^{(n)} = \sum_{i=1}^{N^{(n)}} c^{(n)}_{i-1} \mathbb{1}_{[\delta^{(n)}_{i-1},\delta^{(n)}_i)} = \sum_i c^{(n)}_{i-1} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)}$$

$$X^{(n)}\Big|_{\Omega\times[0,t]} = \sum_i c^{(n)}_{i-1} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1}\wedge t,\, \delta_i \wedge t)} \in S^2_{0,t}$$

si intende che $\mathbb{1}_{[t,t)} \equiv 0$

$$I^{(n)}_t = I_{0,t}(X^{(n)}) = \sum_i c^{(n)}_{i-1}\left(B_{\delta_i\wedge t} - B_{\delta_{i-1}\wedge t}\right)$$

$$t \longmapsto I^{(n)}_t \quad \text{è continua su } [0,T] \quad \forall n \quad \text{q.o. } \omega$$

HW: $(I_t)_{t\geq 0}$ è una martingala

HW: se τ_1 e τ_2 sono due t.d.a., $\tau_1 \wedge \tau_2$ è t.d.a.

$$X^{(n)} := \sum_{i=1}^{N} C_{i-1}^{(n)} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)} \qquad \delta = \delta^{(n)} \in \Delta_{0,T} \qquad t \in [\delta_{k-1}, \delta_k)$$

$$X^{(n)} \mathbb{1}_{[0,t)} = \sum_{i=1}^{k-1} C_{i-1}^{(n)} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1},\delta_i)} + C_{k-1}^{(n)} \mathbb{1}_{[\delta_{k-1},t)} + 0 \in S^2_{0,T} \quad \text{con } \delta \text{ e } C \text{ diversi}$$

$$I_{0,T}\left(X^{(n)}\mathbb{1}_{[0,t)}\right) = \sum_{i=1}^{k-1} C_{i-1}^{(n)} \left(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}\right) + C_{k-1}^{(n)}\left(B_t - B_{\delta_{k-1}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} C_{i-1}^{(n)} \left(B_{\delta_i \wedge t} - B_{\delta_{i-1}\wedge t}\right) = I_{0,t}\left(X^{(n)}\Big|_{\Omega\times[0,t]}\right) =: I_t^{(n)}$$

si vede che q.c. $I^{(n)}$ ha traiettorie continue su $[0,T]$ (ora 31)

$$E\left(I_{a,b}(X) \mid \mathcal{F}_a\right) = 0 \text{ q.c.} \qquad I_b = I_a + I_{a,b} \text{ q.c.}$$

$$E\left(I_b(X) - I_a(X) \mid \mathcal{F}_a\right) = 0 \text{ q.c.} \quad \forall\, 0 \le a \le b \qquad E\left(I_b(X)\mid\mathcal{F}_a\right) = I_a(X)$$

entrambe vere sono le propr. di mg

$\Rightarrow I^{(n)}$ è mg continua

$\Rightarrow I^{(n)} - I^{(n-1)}$ è mg cont L^2 $\Rightarrow \left(I^{(n)} - I^{(n-1)}\right)^2$ è sbmg cont

posso applicare la disug. massimale

$$P\left(\sup_{[0,T]} \left|I_t^{(n)} - I_t^{(n-1)}\right| > \sqrt{\lambda_n}\right) = P\left(\sup_{[0,T]} \left(I_t^{(n)} - I_t^{(n-1)}\right)^2 > \lambda_n\right) \le \frac{1}{\lambda_n} E\left[\left(I_T^{(n)} - I_T^{(n-1)}\right)^2\right]$$

piccolo

$$= \frac{1}{\lambda_n} \underbrace{E\left[\left(I_T\left(X^{(n)} - X^{(n-1)}\right)\right)^2\right]}_{\|I_T\|^2_{L^2(\Omega)}} \overset{\text{Is. Itô}}{=} \frac{1}{\lambda_n} \left\|X^{(n)} - X^{(n-1)}\right\|_2^2$$

grande · va preso più piccolo · norma di $M^2_{0,T}$ ovvero $E\int_0^T (\dots)^2\,dt$

Scelgo λ_n e $X^{(n)}$ in modo tale che $\sum_n \sqrt{\lambda_n} < \infty$ e $\sum_n \frac{1}{\lambda_n} \|X^{(n)} - X^{(n-1)}\|_2^2 < \infty$

Per Borel-Cantelli q.c. $\sum \sup_{[0,T]} \left|I_t^{(n)} - I_t^{(n-1)}\right| < \infty$

ovvero q.c. $I^{(n)}$ è di Cauchy rispetto alla norma del sup, perciò converge q.c. uniformemente ad un limite continuo $I^{(\infty)}$

$$I^{\infty}_{\cdot}(\omega) = \begin{cases} \lim_n I^{(n)}_{\cdot}(\omega) & \text{se converge} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per mostrare che $I = (I_t)_{[0,T]}$ ammette una modif. cont $(I^{(\infty)})$

$\forall t \in [0,T] \quad I_t = I_t^{(\infty)}$ q.c.

$I_t^{(n)} \xrightarrow{q.c.} I_t^{(\infty)}$ anche in P

$I_t^{(n)} \xrightarrow{L^2} I_t$ anche in P

$\Rightarrow I_t^{(\infty)} = I_t$ q.c.

Normalmente si supporrà di fissare $\int_0^t X_s \, dB_s$ con traiettorie continue

☆ $\int_0^t X_s dB_s$ è mg a traiettorie cont. è anche mg L^2

SULLE MARTINGALE L^2

$X = (X_t)_{t\geq 0}$ mg $L^2 \iff \forall t \geq 0 \; X_t \in L^2(\Omega)$ allora X^2 sbmg

- X mg L^2 : $\forall u \leq s \leq t \qquad E((X_t - X_s)^2 | \mathcal{F}_u) = E(X_t^2 - X_s^2 | \mathcal{F}_u)$ q.c.

<u>Dim</u> basta condizionare risp $\mathcal{F}_u$ l'uguaglianze sotto

$$E\left((X_t-X_s)^2 | \mathcal{F}_s\right) = E(X_t^2|\mathcal{F}_s) - 2X_s \underbrace{E(X_t|\mathcal{F}_s)}_{X_s} + X_s^2 = E(X_t^2|\mathcal{F}_s) - X_s^2 = E(X_t^2 - X_s^2|\mathcal{F}_s)$$

$\mathcal{F}_s \supseteq \mathcal{F}_u$

- X mg L^2 : $\forall s \leq u \leq t$

$$E((X_t-X_s)^2|\mathcal{F}_u) = (X_u - X_s)^2 + E((X_t-X_u)^2|\mathcal{F}_u) = (X_u-X_s)^2 + E(X_t^2 - X_u^2|\mathcal{F}_u)$$

(HW)

- X mg L^2 : $\forall \delta \in \Delta_{0,\infty} \qquad A_t^\delta := \sum_{i=1}^\infty (X_{\delta_i \wedge t} - X_{\delta_{i-1}\wedge t})^2$ var. quadr. approssimata in $[0,t]$

tesi : $\boxed{X_t^2 - A_t^\delta \text{ è mg}}$

<u>Dim</u> $\quad 0 \leq s \leq t \qquad s \in [\delta_{j-1}; \delta_j)$

spezzo

$$E(A_t^\delta|\mathcal{F}_s) = E\Big[\sum_{\delta_i \leq s} (X_{\delta_i \cancel{\wedge t}} - X_{\delta_{i-1}\cancel{\wedge t}})^2 + \sum_{\delta_{i-1}>s} (X_{\delta_i\wedge t} - X_{\delta_{i-1}\wedge t})^2 + (X_{\delta_j \wedge t} - X_{\delta_{j-1}\cancel{\wedge t}})^2 \Big| \mathcal{F}_s\Big]$$

$(X_s - X_{\delta_{j-1}})^2 + E[X_{\delta_j\wedge t}^2 - X_s^2 | \mathcal{F}_s]$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^\infty (X_{\delta_i\wedge s} - X_{\delta_{i-1}\wedge s})^2}_{A_s^\delta} + E[X_t^2 - X_s^2|\mathcal{F}_s] = A_s^\delta + E(X_t^2|\mathcal{F}_s) - X_s^2$$

è la propr. di mg.

- VARIAZIONE QUADRATICA

thm: X mg L^2 continua $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ completa

allora $\exists!$ processo $A = (A_t)_{t\geq 0}$ continuo, adattato, nullo in zero, crescente

tale che $X_t^2 - A_t$ sia mg

Inoltre $A_t := P\text{-}\lim\limits_{\substack{|\delta|\to 0\\ \delta\in\Delta_{0,t}}} \sum_{i=1}^{N} (X_{\delta_i} - X_{\delta_{i-1}})^2$

★ Questo processo si chiama variazione quadratica di X e si denota con

$$\langle X \rangle = \left(\langle X\rangle_t\right)_{t\geq 0} \qquad \langle X\rangle_t = A_t$$

★ A_t^δ definito prima non è crescente

Dim unicità (esistenza non ci servirà)

RPA. $A^{(1)}$ e $A^{(2)}$ che soddisfano $M := A^{(1)} - A^{(2)} = (X^2 - A^{(2)}) - (X^2 - A^{(1)})$ è una mg

cont., adattata, nulla in zero, a var. limitata (BV)

Sia V_t la var. totale su $[0,t]$ di M $\qquad V_t := \sup\limits_{\delta\in\Delta_{0,t}} \sum_i |M_{\delta_i} - M_{\delta_{i-1}}|$

a) $V_t \leq K$ q.c. $\forall t > 0$. Sia $\delta \in \Delta_{0,t}$ (def per ogni ω)

$$E(M_t^2) = E\left[\sum_i (M_{\delta_i}^2 - M_{\delta_{i-1}}^2)\right] = E\left[\sum_i (M_{\delta_i} - M_{\delta_{i-1}})^2\right] \leq E\left[\sup_i |M_{\delta_i} - M_{\delta_{i-1}}| \underbrace{\sum_j |M_{\delta_j} - M_{\delta_{j-1}}|}_{\leq K}\right]$$

che sia ∞? vanno fatti al contrario

$$\leq K\, E\Big[\underbrace{\sup_i |M_{\delta_i} - M_{\delta_{i-1}}|}\Big]$$

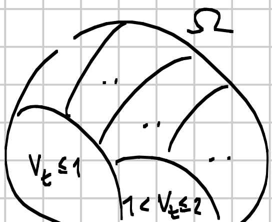
tende a zero per $|\delta| \to 0$

grazie all' uniforme cont. delle traiettorie

$\leq K$, quindi per (DOM) $E(\dots) \to 0$

b) Uso la "localizzazione" $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : V_t \geq n\}$ t.d.a.

continua



$\tau_n \uparrow \infty$ q.c. (check)

$\{\tau_n > t\} \uparrow$ evento di prob. 1

$\{V_t < n\}$ ($\{\tau_n > t\} = \{V_t < n\}$)

M^{τ_n} la mg arrestata $\qquad M_t^{\tau_n} := M_{\tau_n \wedge t}$

mg, cont, nulla in zero con var. tot $\leq n$ q.c.

applico a) $\Rightarrow \quad E\left(\left(M_t^{\tau_n}\right)^2\right) = 0 \quad \forall t \ \forall n$

$$E(M_t^2) \underset{(MON)}{=} \lim_{n \to \infty} E\left(M_t^2 ; \tau_n > t\right) = \lim_{n \to \infty} E\left(\left(M_t^{\tau_n}\right)^2 ; \tau_n > t\right) = 0$$

HW : $\langle I \rangle_t = \int_0^t X_s^2 \, ds$

- Var. quadratica dell'integrale stocastico

$X \in M^2_{0,T}$ $\quad I_t = \int_0^t X_s dB_s$ $\quad t \in [0,T]$ $\quad I$ mg L^2 continua

$$\boxed{\langle I \rangle_t = \int_0^t X_s^2 ds}$$

$\underbrace{\int_0^T X_s^2(\omega) < \infty \text{ q.o. } \omega}$

<u>Dim</u> i. processo adattato ✓

ii. continuo $X \in M^2_{0,T} \subseteq L^2(\Omega \times [0,T])$ $\quad E \int_0^T X_s^2 ds < \infty$

q.o. ω $\quad X_\cdot(\omega) \in L^2(0,T)$

anzi, assolutamente continua

iii nullo in zero ✓

iv. crescente ✓

v. $I_t^2 - \int_0^t X_s^2 ds$ è mg ?

so (ora 23) $\forall a \leq b$ $\quad E\left[(\overset{\overset{I_b - I_a}{\parallel}}{I_{a,b}(X)})^2 \mid \mathcal{F}_a\right] = E\left[\int_a^b X_s^2 ds \mid \mathcal{F}_a\right]$

$$E\left[\int_0^b X_s^2 ds \Big| \mathcal{F}_a\right] - \int_0^a X_s^2 ds = E\left[I_b^2 \mid \mathcal{F}_a\right] - I_a^2$$ proprietà di mg

★ Abbiamo definito l'integrale stocastico per processi in

$$\mathcal{M}^2 := \bigcap_{t \geq 0} M^2_{0,t}$$ (in realtà devo chiedere che le restrizioni a $[0,t]$ stiano in $M^2_{0,t}$)

$$\boxed{\int_0^t X_s dB_s \text{ mg } L^2 \text{ cont con var. quadratica } \int_0^t X_s^2 ds}$$

- INT. STOC. PER PROCESSI $\mathcal{M}^2_{loc}$

$$\mathcal{M}^2_{loc} := \left\{ X = (X_t)_{t \geq 0} \text{ progr. mis. t.c. } \forall t \geq 0 \int_0^t X_s^2 ds < \infty \text{ q.c.} \right\}$$

ovviamente $\mathcal{M}^2 \subseteq \mathcal{M}^2_{loc}$

Siccome per definirlo serve la "localizzazione", premettiamo:

• Thm (di localizzazione per int. stoc. di processi $\mathcal{M}^2$)

Sia $A \in \mathcal{F}$ un evento di Ω

Se $X, Y \in M^2_{0,t}$ coincidono per $\omega \in A$ $\mathcal{L}$-q.o. $s \in [0,t]$

Allora q.o. $\omega \in A$ $I_\cdot(X) = I_\cdot(Y)$ su $[0,t]$

Dim Per linearità wlog $Y=0$ hp: $X=0$ $\omega \in A$ q.o. $s \in [0,t]$

$$\forall \delta \in \Delta_{0,t} \qquad \pi_\delta X = \sum_{i=1}^{N} C_{i-1}^X \mathbb{1}_{[\delta_{i-1}, \delta_i)} \qquad C_i^X = \frac{1}{\delta_i - \delta_{i-1}} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} X_s \, ds$$

$C_i^X = 0$ su A $\forall i$

$I^{(n)} = I_{0,t}(\pi_{\delta(n)} X) = \sum_i C_{i-1}^X (B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) = 0$ su A

$I^{(n)} \xrightarrow{L^2} I$ non basta

Sappiamo (ora 32) che a patto di prendere una sottosucc. in modo che $\pi_{\delta(n)} X \xrightarrow{M^2} X$ abbastanza velocemente, vale:

q.o. ω $I_\cdot^{(n)}(\omega) \longrightarrow I_\cdot(\omega)$ uniformemente

q.o. $\omega \in A$ $I_\cdot(\omega) = 0$

• Definizione I su $\mathcal{M}^2_{loc}$ $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$

$\tau_n := \inf\{t \geq 0 : \int_0^t X_s^2 \, ds \geq n\}$ t.c. $\tau_n \uparrow \infty$ q.c.

$\forall t \geq 0$ $\{\tau_n > t\} \uparrow$ evento di prob. 1

$\rightarrow \int_0^{\tau_n} X_s^2 \, ds = n$ se $\tau_n < \infty$, in generale può essere $\leq n$

def in modo ovvio ω per ω

$Y^{(n)} := X \mathbb{1}_{[0,\tau_n)}$ $\qquad Y_t^{(n)}(\omega) := X_t(\omega) \mathbb{1}_{[0,\tau_n(\omega))}(t)$

vediamo che $Y^{(n)} \in \mathcal{M}^2$

$$\forall t \geq 0 \qquad E \int_0^t (Y_s^{(n)})^2 \, ds = E \int_0^t X_s^2 \mathbb{1}_{[0,\tau_n)}(s) \, ds = E \int_0^{t \wedge \tau_n} X_s^2 \, ds \leq n$$

Q: posso dire che Y è progr. mis.? $\mathbb{1}_{[0,\tau_n)}$ lo è perché cont. a dx e adattata; inoltre il prodotto di p.m. è p.m. ✓

Ho definito $I^{(n)}$ $\quad I_t^{(n)} := I_t(Y^{(n)})$ mg L^2 continua

$t \geq 0$ $\quad \{\tau_1 > t\}$ su questo $X = Y^{(1)} = Y^{(2)} = \dots$ su tutto $[0,t]$

$\{\tau_2 > t\}$ $\quad Y^{(1)}$ boh ; $X = Y^{(2)} = Y^{(3)} = \dots$ " " "

fissato $t \geq 0$ e $k \in \mathbb{N}$, su $\{\tau_k > t\}$:

$$\to Y_s^{(m)} = Y_s^{(n)} = X_s \qquad \forall s \in [0,t] \quad \forall m,n \geq k$$

thm. di local. $\Rightarrow$ q.o. $\omega \in \{\tau_k > t\}$, $I_s^{(m)} = I_s^{(n)}$ $\qquad \forall s \in [0,t] \quad \forall m,n \geq k$

$\left(\text{NB. se } X \in M^2_{0,t},\ I_s^{(m)} = \int_0^s X_u \, dB_u \right)$

in particolare $\lim_{n\to\infty} I_\cdot^{(n)} = I_\cdot^{(k)}$ q.o. $\omega \in \{\tau_k > t\}$

continua

Def : $I_t := I_t(X) := \int_0^t X_s \, dB_s :=$ q.c.$-\lim_{n\to\infty} \int_0^t X_s \mathbb{1}_{[0,\tau_n)}(s) \, dB_s$

★ È un'estensione dell'integrale su M^2

★ Ha traiettorie continue : $I_\cdot$ su $\{\tau_k > t\}$ coincide con $I_\cdot^{(k)}$ su $[0,t]$

★ Linearità e decomposizione $\int_a^s + \int_s^c = \int_a^c$ ... vere

★ Non è vero che $I_t \in L^2$ né a L^1, quindi non è una mg e non ha senso domandarsi se è continuo (la isometria di Itō fallisce)

★ Ogni processo adattato e cont a destra sta in M^2_{loc}

- I è un operatore continuo, nelle topologie giuste

norma $L^2(a,b) = L^2(0,t)$

Thm: $X^{(n)}, X \in M^2_{loc}$ $\quad n \geq 1$, $\forall t \geq 0$

norma $L^\infty(0,t)$

se $X^{(n)} \to X$ in P secondo $\|\cdot\|_*$

allora $I(X^{(n)}) \to I(X)$ in P secondo $\|\cdot\|_\infty$

Dim : hp : $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\|X^{(n)} - X\|_* > \varepsilon \right) = 0$

ts : $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{[0,t]} |I_\cdot(X^{(n)}) - I_\cdot(X)| > \varepsilon \right) = 0$

Claim: $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$ $\forall t \geq 0$ $\forall \varepsilon, \delta > 0$

$$P\left(\sup_{[0,t]} |I_\cdot(X)| > \varepsilon\right) \leq \frac{\delta}{\varepsilon^2} + P\left(\int_0^t X_u^2\, du \geq \delta\right)$$

per linearità applico il Claim a $I_\cdot(X^{(n)}) - I_\cdot(X) = I_\cdot(X^{(n)} - X)$

$$P\left(\sup_{[0,t]} |I_\cdot(X^{(n)}) - I_\cdot(X)| > \varepsilon\right) \leq \frac{\delta}{\varepsilon^2} + P\Bigg(\underbrace{\int_0^t (X_u^{(n)} - X_u)^2}_{\|X^{(n)} - X\|^2_* \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0} \geq \delta\Bigg) \longrightarrow 0$$

<u>Dim claim</u>: $\tau = \tau_\delta := \inf\left\{ s \geq 0 : \int_0^s X_u^2\, du \geq \delta \right\}$

$\tilde{X} := X \mathbb{1}_{[0,\tau)}$ coincide con X su $\{\tau > t\} \times [0,t]$

$$I(X \mathbb{1}_{[0,\tau_1)}) = I(X) \quad \text{su } \{\tau_1 > t\} \times [0,t] \qquad \text{per def di } I(X)$$

$\| \leftarrow$ su $\{\tau > t\} \times [0,t]$ $\Rightarrow$ località

$X \mathbb{1}_{[0,\tau)}$

$\Downarrow$

$$I_\cdot(X) = I_\cdot(X \mathbb{1}_{[0,\tau)}) = I_\cdot(\tilde{X}) \quad \text{su } \{\tau > t\} \times [0,t]$$

$$P\left(\sup_{[0,t]} |I_\cdot(X)| > \varepsilon\right) = P(\ldots ; \tau > t) + P(\ldots ; \tau \leq t)$$

$$\leq P\left(\sup_{[0,t]} |I_\cdot(\tilde{X})|^2 > \varepsilon^2\right) + P(\tau \leq t)$$

$I_\cdot(\tilde{X})$ è mg L^2 $\Rightarrow$ applico la disug max

$$\leq \frac{E(I_t(\tilde{X})^2)}{\varepsilon^2} + P\left(\int_0^t X_u^2\, du \geq \delta\right)$$

$$= \|I_t(\tilde{X})\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\tilde{X}\|^2_{L^2(\Omega \times [0,t])} \leq \delta$$

fine.

Next: $\int_0^\tau X_s\, dB_s$, sia $\mathcal{M}^2$ sia $\mathcal{M}^2_{loc}$ è martingala locale

Abbiamo def I per :

$S_{a,b}$ $\quad X = \sum_{i=1}^{N} C_{i-1} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1};\delta_i)}$ $\qquad I_{a,b}(X) := \sum C_{i-1}(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})$

$\mathcal{M}^2$ $\quad E\int_0^t X_s^2 ds < \infty \ \forall t \geq 0$ $\qquad I_{0,t}(X) = P\text{-}\lim_n I_{0,t}(X^{(n)})$

su $[0,T]$: $\quad \| I_\cdot(X^{(n)}) - I_\cdot(X) \|_{sup} \xrightarrow[n]{P} 0$

$\mathcal{M}^2_{loc}$ $\quad \int_0^t X_s^2 ds < \infty \ \forall t$ q.c. $\qquad I_{0,t}(X) = q.c.\text{-}\lim_n I_{0,t}(X \mathbb{1}_{[0,\tau_n)})$

su $[0,T]$: $\quad I_\cdot(X^{(n)}) \xrightarrow[n]{q.c.} I_\cdot(X)$ in tutte le topologie

INTEGRARE FINO AD UN TEMPO D'ARRESTO

$\tau \leq T$ q.c.

$$I_\tau := \int_0^t X_s dB_s \Big|_{t=\tau} = \int_0^\tau X_s dB_s = \int_0^\infty \underbrace{X_s \mathbb{1}_{[0,\tau)}(s)}_{\text{processo}} dB_s =: \tilde{I}_\tau$$

Mostriamo che coincidono.

① $X \in \mathcal{M}^2$ anzi $X \in \mathcal{M}^2_{0,T}$ wlog

$$\tilde{I}_\tau := \int_0^T \underbrace{X_s \mathbb{1}_{[0,\tau)}}(s) dB_s$$

la $\|\cdot\|_2 < \infty$ ovviamente

prog. mis. come prodotto di roba che lo è $\Big\} \in \mathcal{M}^2_{0,T}$

$$I_\tau := I_t(X)\Big|_{t=\tau} = P\text{-}\lim I_t(X^{(n)}) \Big|_{t=\tau(\omega)}$$

questo è globale su Ω

se fosse un limite q.c. sarebbe più facile

<u>Dim</u> a) τ è discreta $\qquad \tau \in \{t_1, t_2, \dots\}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\tau = t_k) = 1$$

$\forall k$ su $\{\tau = t_k\}$ $\left| \begin{array}{l} I_\tau = I_{t_k} = \int_0^{t_k} X_s\, dB_s \quad \text{q.c.} \\ \tilde{I}_\tau = \int_0^T X_s 1\!\!1_{[0,t_k)}(s)\, dB_s = \int_0^{t_k} X_s\, dB_s \quad \text{q.c.} \end{array} \right.$

$I_\tau = \tilde{I}_\tau$ per q.o. $\omega \in \underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tau = t_k\}}_{\text{prob } 1}$

b) τ qualsiasi. Sia $\tau_n \downarrow \tau$ con $\tau_n \leq T$ q.c.
tale che τ_n è discreta (HW: come la costruisco)

q.o. ω $\tau_n(\omega) \longrightarrow \tau(\omega)$ dall'alto
Se f è continua a destra $\lim_{n\to\infty} f(\tau_n(\omega)) = f(\tau(\omega))$

Siccome I_t è continua $I_{\tau_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{q.c.}} I_\tau$ e anche in P

$X 1\!\!1_{[0,\tau_n)} \xrightarrow{?} X 1\!\!1_{[0,\tau)}$ $\Rightarrow$ $\tilde{I}_{\tau_n} \xrightarrow{?} \tilde{I}_\tau$

hope: $E \int_0^T \left[X_s 1\!\!1_{[0,\tau_n)} - X_s 1\!\!1_{[0,\tau)} \right]^2 ds \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$(\omega, s) \in \Omega \times [0,T]$ $X_s(\omega) 1\!\!1_{[0,\tau_n(\omega))}(s) = Y_s^{(n)}(\omega)$

se $s < \tau(\omega) \Rightarrow s < \tau_n(\omega)\ \forall n$ quindi $X_s(\omega) = Y_s^{(n)}(\omega)$

$X_s(\omega) = X_s(\omega) 1\!\!1_{[0,\tau(\omega))}(s)$

se $s > \tau(\omega) \Rightarrow$ se $\omega \in \{\omega : \tau_n \downarrow \tau\}$ $s > \tau_n(\omega)$ definitivamente

quindi $Y_s^{(n)}(\omega) = 0$ definitivamente

$0 = X_s(\omega) 1\!\!1_{[0,\tau(\omega))}(s)$

se $s = \tau(\omega)$ boh

$\int_\Omega \underbrace{\int_0^T 1\!\!1_{s=\tau(\omega)}\, ds}_{=0\ \forall \omega}\, dP = \int_\Omega 0\, dP = 0$

per $P \times \mathcal{L}$ - q.o. $(\omega, s) \in \Omega \times [0,T]$ $Y_s^{(n)}(\omega) \longrightarrow X_s(\omega) 1\!\!1_{[0,\tau(\omega))}(s)$

serve (DOM) per passare al limite M^2, $\|Y^{(n)}\|_2 \leq \|X\|_2$

perciò $Y^{(n)} \longrightarrow X 1\!\!1_{[0,\tau)}$ in M^2 $\Rightarrow$ $\tilde{I}_{\tau_n} := I(Y^{(n)}) \xrightarrow{L^2} \tilde{I}_\tau$ e in P

$I_\tau \xleftarrow{P} I_{\tau_n} = \tilde{I}_{\tau_n} \xrightarrow{P} \tilde{I}_\tau$ perciò $I_\tau = \tilde{I}_\tau$ q.c.

② $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$ $\qquad \int_0^{\tau_n} X_s^2\,ds = n \qquad \tau_n \uparrow \infty$ q.c.

$$\tilde{I}_\tau := \int_0^T \underbrace{X_s \mathbb{1}_{[0,\tau)}(s)}_{\mathcal{M}^2_{loc}}\,dB_s \qquad I_\tau := I_t\Big|_{t=\tau} = \text{q.c.-}\lim_{n\to\infty} I_t(X\mathbb{1}_{[0,\tau_n)})\Big|_{t=\tau}$$

$$= \text{q.c.-}\lim_{n\to\infty} I_\tau(X\mathbb{1}_{[0,\tau_n)})$$

$$① = \text{q.c.-}\lim_{n\to\infty} \tilde{I}_\tau(X\mathbb{1}_{[0,\tau_n)})$$

$$= \text{q.c.-}\lim_{n\to\infty} I_T(\underbrace{X\mathbb{1}_{[0,\tau_n)}\mathbb{1}_{[0,\tau)}}_{\mathcal{M}^2_{loc}}) \quad \text{anche in } P$$

hope: $Y^{(n)} := X\mathbb{1}_{[0,\tau)}\mathbb{1}_{[0,\tau_n)} \xrightarrow{?} X\mathbb{1}_{[0,\tau)} =: Y$

$\hookrightarrow \|Y^{(n)} - Y\|_* \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$?

$$\|Y^{(n)} - Y\|_*^2 = \int_0^T (Y_s^{(n)} - Y_s)^2\,ds \qquad \text{q.o. } \omega \quad \tau_n(\omega) \uparrow \infty \Rightarrow Y_\cdot^{(n)}(\omega) = Y_\cdot(\omega)$$

def^ente

quindi $\|Y^{(n)} - Y\|_* \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} 0$ e anche in P

Applico la continuità di I rispetto a questa topologia:

$$\|I(Y^{(n)}) - I(Y)\|_{sup} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \qquad \text{uniforme su } [0,T]$$

$$\Downarrow$$

$$|I_T(Y^{(n)}) - I_T(Y)| \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \qquad \text{puntuale in } T$$

$$\tilde{I}_\tau = I_T(Y) = P\text{-}\lim_{n\to\infty} I_T(Y^{(n)}) = I_\tau \qquad \text{q.c.}$$

- Def di martingala locale

$X = (X_t)_{t\geq 0}$ è mg locale se esiste $\tau_n \uparrow \infty$ q.c. t.c.

tali che X^{τ_n} è una mg $\forall n \geq 1$

- ☆ mg $\Rightarrow$ mg locale $\quad (\tau_n \equiv +\infty)$
- ☆ X mg locale, $|X_t| \leq Y \in L^1 \ \forall t \Rightarrow X$ mg (HW)
- ☆ X mg locale, $X \geq 0 \Rightarrow X$ supermg (HW)

- Integrale stocastico su $\mathcal{M}^2_{loc}$ è una mg locale

$X \in \mathcal{M}^2_{loc}$ $\quad I = (I_t)_{t\geq 0} \quad I_t = \int_0^t X_s \, dB_s = \text{q.c.-}\lim_{n\to\infty} \int_0^t X_s \mathbb{1}_{[0,\tau_n)}(s) \, dB_s$

dove $\tau_n := \inf\left\{ t \geq 0 : \int_0^t X_s^2 \, ds \geq n \right\}$

I^{τ_n} è mg?

$$I_t^{\tau_n} = I_{\tau_n \wedge t} = \int_0^{\tau_n \wedge t} X_s \, dB_s = \int_0^t X_s \mathbb{1}_{[0,\tau_n\wedge t)}(s) \, dB_s = \int_0^t \underbrace{X_s \mathbb{1}_{[0,\tau_n)}(s)}_{\in M^2 \ \forall n} \, dB_s \quad \text{è mg}$$

(2) $\tau_n \wedge t \leq t$ è tda

FORMULA DI ITŌ

X processo stocastico $\quad X_t = X_0 + \int_0^t Y_s \, dB_s + \int_0^t Z_s \, ds \quad$ processi di Itō

$V_t = \varphi(X_t)$ è un processo di Itō? Qual è la sua decomposizione?

Caso particolare : $X_t = B_t \qquad \varphi \in C^2$

$$\boxed{\varphi(B_t) = \varphi(B_0) + \int_0^t \varphi'(B_s) \, dB_s + \int_0^t \frac{1}{2} \varphi''(B_s) \, ds} \quad \boxed{dV_t = \varphi' dB_t + \frac{1}{2} \varphi'' dt}$$

$\varphi(x(t))$ derivo $\frac{d}{dt} \varphi(x(t)) = \varphi'(x(t)) \, x'(t)$

$$\varphi(x(t)) = \varphi(x(0)) + \int_0^t \varphi'(x(t)) \underbrace{x'(t) \, dt}_{dx_t}$$

determin.

ESEMPIO 1

$$\begin{cases} dX_t = bX_t \, dt + \sigma X_t \, dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \qquad \boxed{X_t - X_0 = \int_0^t bX_s \, ds + \int_0^t \sigma X_s \, dB_s}$$

che X_t soddisfa?

$$d(\log X_t) \overset{\text{NO}}{=} \frac{dX_t}{X_t} = b \, dt + \sigma \, dB_t$$

$$d(\log X_t) = d(\varphi(X_t)) = \underbrace{\varphi'(X_t)}_{\frac{1}{X_t}} dX_t + \frac{1}{2}\underbrace{\varphi''(X_t)}_{-\frac{1}{X_t^2}} \underbrace{d\langle X\rangle_t}_{\sigma^2 X_t^2 dt}$$

$b\int_0 X_s ds$ è BV

$$\langle X\rangle_t = \left\langle \int_0 \sigma X_s dB_s \right\rangle_t = \int_0^t \sigma^2 X_s^2 dt$$

ora 34

$$d(\log X_t) = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2}\sigma^2 dt = \left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dB_t$$

$b\,dt + \sigma dB_t$

$$\log X_t - \log \overset{x}{\overset{\shortparallel}{X_0}} = \left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t$$

$$X_t = X_0 e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}$$

Da qui si può procedere al contrario, perché questo processo è ben definito e si possono usare le sue proprietà

$$Y_t = \left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t \qquad \text{processo di Itō}$$

$$dY_t = \left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dB_t$$

$$X_t := x e^{Y_t} \qquad dX_t = d(\varphi(Y_t)) \quad \text{con Itō}$$

$$\boxed{d(\varphi(X_t)) = \varphi'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}\varphi''(X_t)\, d\langle X\rangle_t}$$

vale per tutti i processi di Itō $\quad dX_t = Y_t^{(1)}dt + Y_t^{(2)}dB_t$

$$\begin{cases} dX_t = \underbrace{b X_t\, dt}_{} + \underbrace{\sigma X_t\, dB_t}_{} \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

nudo

lecito

notazione per: $X_t - X_0 = \int_0^t b X_s\, ds + \int_0^t \sigma X_s\, dB_s$

forse ~~la~~ una soluzione è $X_t = x_0 e^{(b - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t} = \cancel{\varphi(B_t)} = \varphi(t, B_t)$

Formula di Ito

1) $\varphi \in C^2$ $X_t = \varphi(B_t)$ allora $dX_t = \varphi'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}\varphi''(B_t)ds$

ovvero $X_t - X_0 = \int_0^t \varphi'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi''(B_s)ds$

2) $\boxed{\varphi \in C^{1,2}}$ $X_t = \varphi(t, B_t)$ $\varphi = \varphi(t, x)$ allora

$$dX_t = \varphi_t(t, B_t)dt + \varphi_x(t, B_t)dB_t + \frac{1}{2}\varphi_{xx}(t, B_t)dt$$

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_t(s, B_s)ds + \int_0^t \varphi_x(s, B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_{xx}(s, B_s)ds$$

$\varphi_x \in C$

quindi $\varphi_x(s, B_s) \in M^2_{loc}$

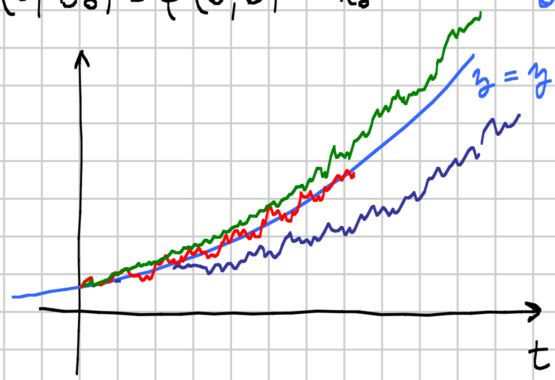
$$\varphi(t, x) := x_0 e^{(b - \sigma^2/2)t + \sigma x}$$

$$\varphi_t(t, x) = \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)\varphi(t, x) \qquad \varphi_x(t, x) = \sigma\varphi(t, x) \qquad \varphi_{xx}(t, x) = \sigma^2\varphi(t, x)$$

$X_t = \varphi(t, B_t)$

$$X_t - X_0 = \int_0^t \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)\underset{\varphi(s, B_s)}{X_s}\, ds + \int_0^t \sigma X_s\, dB_s + \int_0^t \frac{1}{2}\sigma^2 X_s\, ds = \int_0^t b X_s\, ds + \int_0^t \sigma X_s\, dB_s \quad \text{ok}$$

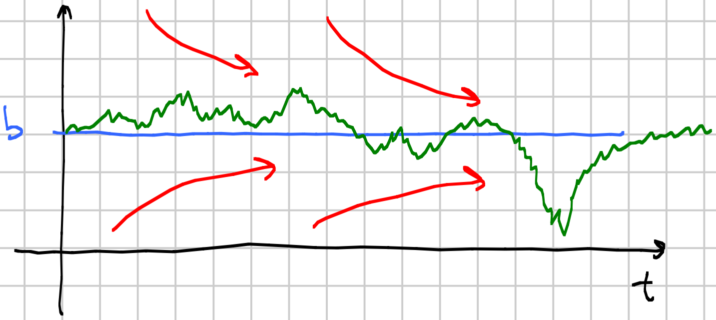
$X_0 = \varphi(0, B_0) = \varphi(0, 0) = x_0$ ok



$y = y_0 e^{bt}$ $y' = by$

valore di un titolo che tipicamente aumenta di b (tasso di interesse)

ESEMPIO 2: PROCESSO DI ORSTEIN - UHLENBECK



NO GEOMETRIC BM

NO BM

$$y' = \lambda(b-y) \qquad \lambda > 0$$

$$dy_t = \lambda(b-y_t)dt + \text{noise}$$

$$\begin{cases} dX_t = \lambda(b-X_t)\,dt + \sigma dB_t \\ X_t = x_0 \end{cases}$$

$$dX_t = -\lambda X_t\,dt + \lambda b\,dt + \sigma dB_t$$

$$X_t = e^{-\lambda t}x_0 + \int_0^t e^{\lambda(s-t)}(\lambda b\,ds + \sigma dB_s)$$

$$X_t := e^{-\lambda t}x_0 + b\int_0^t \lambda e^{\lambda(s-t)}ds + \sigma\int_0^t e^{\lambda(s-t)}dB_s$$

candidato

$$e^{\lambda t}X_t = \underset{e^{\lambda\cdot 0}X_0}{\overset{\parallel}{x_0}} + b\int_0^t \lambda e^{\lambda s}ds + \sigma\int_0^t e^{\lambda s}dB_s$$

$$d(e^{\lambda t}X_t) = b\lambda e^{\lambda t}dt + \sigma e^{\lambda t}dB_t$$

$$\overset{\text{f. di Itō}}{=} \lambda e^{\lambda t}X_t\,dt + e^{\lambda t}dX_t$$

deduco (dividendo per $e^{\lambda t}$): $b\lambda\,dt + \sigma dB_t = \lambda X_t\,dt + dX_t$

$$dX_t = \lambda(b-X_t)dt + \sigma dB_t$$

FORMULA DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI $\lambda \in \mathbb{R}$

$$y'(t) = -\lambda y(t) + f(t)$$

$$y(t) = e^{-\lambda t}y_0 + \int_0^t e^{\lambda(s-t)}f(s)\,ds$$

$$= e^{-\lambda t}\left(y_0 + \int_0^t e^{\lambda s}f(s)\,ds\right)$$

$$y' = -\lambda y + f \quad ✓$$

$\boxed{\text{ord } 39}$

PROCESSI DI ITŌ

$$B_t = B_0 + \int_0^t dB_s \qquad B_t^2 = B_0^2 + \int_0^t 2B_s\,dB_s + \int_0^t ds \qquad B_t^2 = 2\int_0^t B_s\,dB_s + t$$

$$\varphi(t, B_t) = \varphi(0, B_0) + \int_0^t \varphi_x(s, B_s)\,dB_s + \int_0^t \left(\varphi_t(s, B_s) + \frac{1}{2}\varphi_{xx}(s, B_s)\right)ds$$

Def X_t è un processo di Itō se esistono $U \in \mathcal{M}^1_{loc}$ e $V \in \mathcal{M}^2_{loc}$ t.c.:

$$\boxed{dX_t = U_t\,dt + V_t\,dB_t}$$

★ Se esistono, U e V sono unici

RPA $U^{(1)}, V^{(1)}$ $U^{(2)}, V^{(2)}$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^t \left(U_s^{(1)} - U_s^{(2)}\right) ds}_{\text{processo BV}} = \underbrace{-\int_0^t \left(V_s^{(1)} - V_s^{(2)}\right) dB_s}$$

(una mg locale continua se è BV è costante)

dimostrato solo per le mg proprie

★ Se $V_t = 0$ $\boxed{dX_t = U_t\,dt}$

$$X_t - X_0 = \int_0^t U_s\,ds$$

$Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ processo $\mathcal{M}^2_{loc}$

$$\int_0^t Z_s\,dX_s \approx \sum_i Z_{\delta_{i-1}} (X_{\delta_i} - X_{\delta_{i-1}}) = \sum_i Z_{\delta_{i-1}} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} U_s\,ds$$

$$= \int_0^t U_s \sum Z_{\delta_{i-1}} \mathbb{1}_{[\delta_{i-1}, \delta_i)}(s)\,ds$$

$$\approx \int_0^t U_s Z_s\,ds$$

$$\boxed{\int_0^t Z_s\,dX_s = \int_0^t Z_s U_s\,ds}$$

★ Se $U_t = 0$ $dX_t = V_t\,dB_t$

$$X_t - X_0 = \int_0^t V_s\,dB_s$$

$$\boxed{\int_0^t Z_s\,dX_s := \int_0^t Z_s V_s\,dB_s}$$

- **Def** Se X è un processo di Itō $dX_t = U_t\,dt + V_t\,dB_t$
  e $Z \in \mathcal{M}^2_{loc}$ t.c. $ZU \in \mathcal{M}^1_{loc}$ e $ZV \in \mathcal{M}^2_{loc}$

$$\boxed{\int_0^t Z_s\,dX_s := \int_0^t Z_s U_s\,ds + \int_0^t Z_s V_s\,dB_s}$$

★ in particolare è un processo di Itō

- Se X è un processo di Itō $dX_t = U_t\,dt + V_t\,dB_t$

$$\langle X\rangle_t := \left\langle \int_0^{\cdot} V_s\,dB_s \right\rangle_t = \int_0^t V_s^2\,ds$$ è un processo BV

si può dimostrare che $\langle X\rangle_t = P\text{-}\lim_{|\delta|\to 0} \sum_i \left(X_{\delta_i} - X_{\delta_{i-1}}\right)^2$

- Formula di Itō generale

$\varphi \in \mathcal{C}^{1,2}$ $\quad \varphi = \varphi(t,x)$ $\quad X$ un processo di Itō

$$\boxed{d\left(\varphi(t,X_t)\right) = \varphi_t(t,X_t)\,dt + \varphi_x(t,X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\varphi_{xx}(t,X_t)\,d\langle X\rangle_t}$$

→ Applicazione all'esempio 2 : $\varphi(t,x) = e^{\lambda t}x$ $\quad \varphi_t = \lambda e^{\lambda t}x$ $\quad \varphi_x = e^{\lambda t}$ $\quad \varphi_{xx} = 0$

$$d\left(e^{\lambda t}X_t\right) = \lambda e^{\lambda t}X_t\,dt + e^{\lambda t}\,dX_t$$

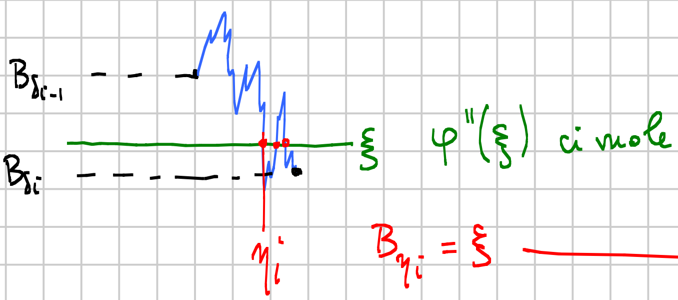
■ DIMOSTRO LA PRIMA FORMULA DI ITŌ

$\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ $\qquad$ tesi : $\varphi(B_t) - \varphi(B_0) = \int_0^t \varphi'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi''(B_s)\,ds$

$\delta \in \Delta_{0,t}$

$$\varphi(B_t) - \varphi(B_0) = \sum_{i=1}^N \left[\varphi(B_{\delta_i}) - \varphi(B_{\delta_{i-1}})\right]$$

$$= \sum_{i=1}^N \left[\varphi'(B_{\delta_{i-1}})(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) + \frac{1}{2}\varphi''(B_{\eta_i})(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2\right]$$



δ_i sono deterministici

$\eta_i = \eta_i(\omega)$ dipende in modo complicato da ω

$\forall \omega \quad \eta_i(\omega) \in [\delta_{i-1}; \delta_i]$

(I) $$\sum_i \varphi'(B_{\delta_{i-1}})(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \int_0^t \underbrace{\varphi'(B_s)}_{=:X_s} dB_s \qquad \delta = \delta^{(n)}$$

$$\| $$

$$\int_0^t \underbrace{\sum_i \varphi'(B_{\delta_{i-1}}) \mathbb{1}_{[\delta_{i-1}, \delta_i)}(s)}_{=:X_s^{(n)}} dB_s$$

se $X^{(n)} \to X$ in P secondo $\|\cdot\|_*$ allora $I(X^{(n)}) \to I(X)$ in P uniform.

$$\|X^{(n)} - X\|_* = \int_0^t (X_s^{(n)} - X_s)^2 ds = \int_0^t \left[\sum_i (\varphi'(B_{\delta_{i-1}}) - \varphi'(B_s)) \mathbb{1}_{[\delta_{i-1}, \delta_i)}(s)\right]^2 ds$$

$$= \sum_i \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} [\varphi'(B_{\delta_{i-1}}) - \varphi'(B_s)]^2 ds$$

φ' è continua $\quad \varphi' \circ B.$ è continua q.o. $\omega \Rightarrow$ unif. cont. su $[0,t]$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta(\omega) > 0 : |s_1 - s_2| < \eta \Rightarrow |\varphi'(B_{s_1}) - \varphi'(B_{s_2})| < \varepsilon$$

$$\exists n_0(\omega) : n > n_0 \quad |\delta^{(n)}| < \eta \quad \Rightarrow |\delta_{i-1} - s| < \eta$$

$$\Rightarrow (\varphi'(B_{\delta_{i-1}}) - \varphi'(B_s))^2 < \varepsilon^2$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\omega)$ $: n > n_0$ $$\|X^{(n)} - X\|_* \le \sum_i \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \varepsilon^2 ds = \varepsilon^2 t$$

$$\Rightarrow \|X^{(n)} - X\|_* \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} 0 \quad \text{quindi in } P$$

$$\Rightarrow I_t(X^{(n)}) \xrightarrow{P} I_t(X) \qquad \text{CVD.}$$

DIMOSTRO LA PRIMA FORMULA DI ITÔ

$\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ tesi: $\varphi(B_t) - \varphi(B_0) = \int_0^t \varphi'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi''(B_s)\,ds$

$\delta \in \Delta_{0,t}$

$$\varphi(B_t) - \varphi(B_0) = \sum_{i=1}^N \left[\varphi(B_{\delta_i}) - \varphi(B_{\delta_{i-1}})\right]$$

$$= \sum_{i=1}^N \left[\varphi'(B_{\delta_{i-1}})(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) + \frac{1}{2}\varphi''(B_{\eta_i})(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2\right]$$

$\eta_i = \eta_i(\omega) \in [\delta_{i-1}, \delta_i]$ q.c.

Abbiamo mostrato che $\sum_i \varphi'(B_{\delta_{i-1}})(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}}) \xrightarrow{P} \int_0^t \varphi'(B_s)\,dB_s$ (I)

(II)

$$\left|\sum_i \varphi''(B_{\eta_i})(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2 - \sum_i \underbrace{\varphi''(B_{\delta_{i-1}})(\delta_i - \delta_{i-1})}_{\substack{P \downarrow q.c. \\ \int_0^t \varphi''(B_s)ds}}\right| \leq$$

$$\underbrace{\left|\sum_i \left(\varphi''(B_{\eta_i}) - \varphi''(B_{\delta_{i-1}})\right)(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2\right|}_{IIa} + \underbrace{\left|\sum_i \varphi''(B_{\delta_{i-1}})\left[(B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2 - (\delta_i - \delta_{i-1})\right]\right|}_{IIb}$$

IIa fisso ω $\varphi''(B_\cdot(\omega))$ unif. cont su $[0,T]$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta(\omega) : |s_1 - s_2| < \eta \Rightarrow$

$\Rightarrow |\varphi''(B_{s_1}(\omega)) - \varphi''(B_{s_2}(\omega))| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\omega) : n > n_0 \quad \delta = \delta^{(n)} \quad |\delta| < \eta \Rightarrow |\eta_i(\omega) - \delta_{i-1}| < \eta \Rightarrow$

$$\Rightarrow IIa^{(n)} \leq \sum_i \varepsilon (B_{\delta_i^{(n)}} - B_{\delta_{i-1}^{(n)}})^2 \xrightarrow{q.c.} \varepsilon t$$

$$P\text{-}\lim_{|\delta| \to 0} \sum_i (B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2 = \langle B \rangle_t = t$$

se $|\delta^{(n)}|$ è sommabile (e posso imporlo) allora

q.c. $\limsup_n IIa^{(n)} \leq \varepsilon t \Rightarrow \limsup_n IIa^{(n)} = 0$ q.c. $\quad IIa^{(n)} \xrightarrow{q.c.} 0$ e in P

II b   Devo (inizialmente) supporre che φ'' sia limitata

$|\varphi''(x)| \le C \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$E(II_b^2) = E\left(\sum_{i,j} \varphi''(B_{\delta_{i-1}})\varphi''(B_{\delta_{j-1}})\left[(B_{\delta_{i-1}} - B_{\delta_i})^2 - (\delta_i - \delta_{i-1})\right]\left[(B_{\delta_{j-1}} - B_{\delta_j})^2 - (\delta_j - \delta_{j-1})\right]\right)$$

$i<j$ condiziono a $\mathcal{F}_{\delta_{j-1}}$ $\quad E\left[E\left(\sum \ldots \mid \mathcal{F}_{\delta_{j-1}}\right)\right]$

$$= E\left[\sum \varphi'' \varphi'' [\;;\;] E([\;;\;])\right] = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{N} E\left[(\varphi''(B_{\delta_{i-1}}))^2 \underbrace{E\left[\left((B_{\delta_i} - B_{\delta_{i-1}})^2 - (\delta_i - \delta_{i-1})\right)^2 \mid \cancel{\mathcal{F}_{\delta_{i-1}}}\right]}_{E\left[(B\,B)^4 - 2(B-B)^2(\delta-\delta) + (\delta-\delta)^2\right]}\right] = \sum_i \overbrace{E\left(\varphi''(B_{\delta_{i-1}})^2\right)}^{\le C^2} 2(\delta_i - \delta_{i-1})^2$$

$$3(\delta_i - \delta_{i-1})^2 - 2(\delta_i - \delta_{i-1})^2 + (\delta_i - \delta_{i-1})^2$$

$\le |\delta|\, t\, 2C^2 \qquad$ quindi $\quad II_b^{(n)} \xrightarrow{L^2} 0$ e quindi in P

★ Se si prova ad estendere da qui a φ'' qualsiasi per localizzazione

$\tau_n := \inf\{t \ge 0 : |\varphi''(B_t)| \ge n\}$

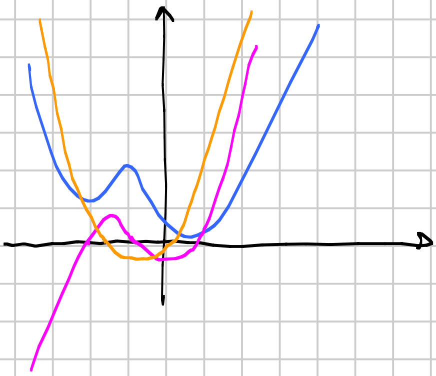
.... serve per chiudere che $\boxed{B_\sigma - B_\tau \text{ indip da } \mathcal{F}_\tau}$

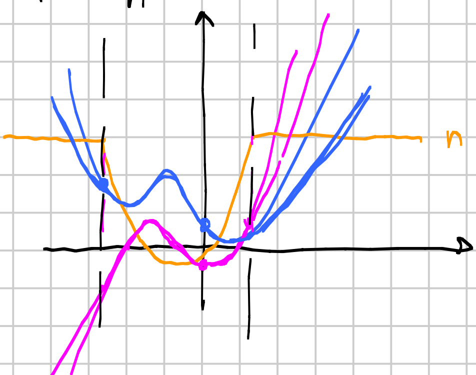
quando $\tau \le \sigma \le t$ q.c.

Abbiamo dimostrato che $\quad \varphi(B_t) - \varphi(B_0) \overset{\forall n}{=} I^{(n)} + II^{(n)} \xrightarrow{P} \int_0^t \varphi'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi''(B_s)ds$

Finito per $\varphi \in C^2$ t.c. $|\varphi''| \le C$

★ Facciamo $\varphi \in C^2$ qualsiasi per approssimazione con $\varphi_n \in C^2$, $|\varphi_n''| \le n$





$f(x) = -n \vee \varphi''(x) \wedge n \qquad F(x) = \varphi'(0) + \int_0^x f(y)dy \qquad \varphi_n(x) = \varphi(0) + \int_0^x F(y)dy$

Per ogni intervallo $[a,b]$ che contiene 0

$$\psi_n = \varphi \qquad \psi_n' = \varphi' \qquad \psi_n'' = \varphi'' \quad \text{definitivamente}$$

ord 41

$$\psi_n(B_t) - \psi_n(B_0) = \int_0^t \psi_n'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \psi_n''(B_s)\,ds$$

tutte q.c.

$$\varphi(B_t) - \varphi(B_0) \overset{?}{=} \int_0^t \varphi'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi''(B_s)\,ds$$

$\forall \omega$ $B_\cdot(\omega)$ manda $[0,t]$ in un intervallo chiuso $[a(\omega), b(\omega)]$ contenente 0

quindi $\forall \omega$ $\exists n_0(\omega)$: $n \geq n_0 \Rightarrow \psi_n \circ B = \varphi \circ B$ $\quad \psi_n' \circ B = \varphi' \circ B$ $\quad \psi_n'' \circ B = \varphi'' \circ B$

su tutto $[0,t]$

EQ. DIFF. STOCASTICA (SDE)

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

- **Def** Una soluzione a questo problema è:

$$\left(\underbrace{\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P}_{\text{spazio di prob. filtrato}}, (B_t)_{t\geq 0}, (X_t)_{t\geq 0}\right)$$

$\mathcal{F}_t$ - BM

processo continuo, adattato a $\mathcal{F}_t$ che soddisfa l'eq.

in particolare $(\sigma(t, X_t))_{t\geq 0} \in M^2_{loc}$ $\quad (b(t, X_t))_{t\geq 0} \in M^1_{loc}$

* Se limito $t \in [0,T]$ la soluzione si dice locale (se no è globale)

* Se X è adattato rispetto alla filtrazione naturale di B si dice soluzione forte. $\quad dX_t = \text{sign}(X_t)\,dB_t$ non ha soluzioni forti

- **Def** C'è unicità per traiettorie se ogni volta che X e X' sono soluzioni con lo stesso $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, B_t)$, allora sono indistinguibili

$\Downarrow$

- **Def** C'è unicità in legge se ogni volta che $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, B_t, X_t)$ e $(\Omega', \mathcal{F}', \mathcal{F}_t', P', B_t', X_t')$ sono soluzioni, X e X' hanno le stesse leggi finito-dimensionali (e quindi su $C[0,T]$)

THM DI ESISTENZA E UNICITÀ

hp: b, σ misurabili e esiste una costante C:

$$|b(t,x)-b(t,y)| \leq C|x-y| \qquad |\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \leq C|x-y|$$

$$b(t,x)^2 \leq C(1+x^2) \qquad \sigma(t,x)^2 \leq C(1+x^2)$$

ts: $\begin{cases} dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$ ha esistenza forte e unicità per traiettorie

Dim (sketch)

Unicità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, B_t)$ X, X' soluzioni

$$X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s \qquad X_t' = \dots \quad \text{differenza}$$

$$X_t - X_t' = \int_0^t (b(s,X_s)-b(s,X_s'))ds + \int_0^t (\sigma(s,X_s)-\sigma(s,X_s'))dB_s \qquad (a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$$

$$E[(X_t-X_t')^2] \leq 2t\int_0^t C^2 E[(X_s-X_s')^2]ds + 2\int_0^t C^2 E[(X_s-X_s')^2]ds$$

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \qquad (a,b)\cdot(1,1) \leq \text{c.s.}$$

NO! PRIMA DEVO LOCALIZZARE

$$\left(\int fg\right)^2 \leq \int f^2 \int g^2$$

$$\tau_n := \inf\{t \geq 0 : X_t \vee X_t' \geq n\}$$

$$E[(X_t^{\tau_n} - X_t'^{\tau_n})^2] \leq \tilde{C}\int_0^t E[(X_s^{\tau_n} - X_s'^{\tau_n})^2]ds \qquad \text{Lemma di Gronwall}$$

$$u \leq \int_0^t bu(s)ds + a \qquad u \leq ae^{bt}$$

$$\Rightarrow E[(\quad)^2] \leq 0 \quad \text{poi mando } n \to \infty$$

$\forall t$ $X_t = X_t'$ q.c. $\Rightarrow$ per cont. q.c. $\forall t$ $X_t = X_t'$

Esistenza (per compattezza)

$$X_t^{(1)} \equiv x \qquad X_t^{(n+1)} = x + \int_0^t b(s, X_s^{(n)})\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})\, dB_s$$

devo dimostrare che $X^{(n)}$ è di Cauchy $M^2_{[0,T]}$ e che $M^2_{[0,T]}$ è completo

$L^2(\Omega \times [0,T])$ e progr. mis

$$M^2 = L^2(\Omega \times [0,T], \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma\text{-alg delle progr. mis.}}}{\mathcal{G}})$$